

Ottavio Serra
Sistemi lineari e
Il teorema di Rouchè – Capelli
(Elegante ma inutile).

Il teorema di Rouchè – Capelli ci dice sotto quali condizioni un sistema (lineare) è compatibile. Di solito ciò accade quando già siamo arrivati a sapere se il sistema dato è o non è compatibile, ma a quel punto il teorema è inutile per la risoluzione.

Un altro oggetto venerando usato per risolvere un sistema è la regola di Cramer: appena la matrice dei coefficienti ha più di tre righe o di tre colonne la regola comincia ad essere sempre più laboriosa da applicare. Il motivo è che, se il rango del sistema è r , la regola richiede il calcolo di $r+1$ determinanti di ordine r .

Per quanto riguarda il teorema di Rouchè – Capelli, c'è da dire inoltre che la dimostrazione di solito riportata dai libri di Analisi è estremamente complessa e si dimentica appena si è superato l'esame. Così è capitato al sottoscritto. Si aggiunga che l'enunciato originale di Rouchè è difficile non solo da dimostrare, ma anche da capire e da ripetere; almeno Capelli ha avuto il merito di averne dato una formulazione semplice e facile da ricordare.

La verità è che si tratta di un teorema che trova la sua naturale collocazione in un corso di Algebra lineare in tale ambito è facile non solo da capire, ma anche da dimostrare, anche se, come detto, non serve per risolvere un sistema.

Ricordo che un sistema lineare, scritto in forma matriciale, è

$$[1] \quad A \cdot \underline{x} = \underline{b},$$

essendo A la matrice dei coefficienti di m righe (numero delle equazioni) ed n colonne (numero delle incognite), \underline{x} è il vettore colonna delle incognite, \underline{b} il vettore colonna dei termini noti.

La matrice A può essere interpretata come la matrice, rispetto alle basi canoniche, di un'applicazione lineare α da \mathbf{R}^n ad \mathbf{R}^m e perciò risolvere la [1] significa trovare, se esiste, un vettore \underline{x} del dominio \mathbf{R}^n che α applica nell'assegnato vettore \underline{b} del codominio \mathbf{R}^m . La compatibilità (risolubilità) del sistema significa che il vettore \underline{b} appartiene all'immagine dell'applicazione lineare $\text{Im}(\alpha)$.

Siccome le colonne di A sono le immagini dei vettori di base del dominio, esse costituiscono un sistema di generatori dell'immagine $\text{Im}(\alpha)$; perciò, se \underline{b} appartiene a detta immagine, esso è combinazione lineare delle colonne di A e la sua aggiunta, come ulteriore colonna, non aumenta il rango di A : **Rango(A) = Rango(A| \underline{b})**. In ciò consiste la dimostrazione, del teorema, nella formulazione inizialmente dovuta a Capelli.

Come è noto, il rango di una matrice è il numero massimo di (vettori) colonne linearmente indipendenti e si dimostra che è anche uguale al numero massimo di righe linearmente indipendenti. Siccome le colonne generano l'immagine dell'applicazione lineare rappresentata dalla matrice, il rango dà la dimensione dell'immagine. Il **Ker**(α) è il sottospazio del dominio \mathbf{R}^n che α manda nel vettore $\underline{0}$ dell'immagine. Perciò se \underline{x}_0 è una soluzione particolare della [1] e \underline{k} è un vettore del **Ker**(α), anche $\underline{x}_0 + \underline{k}$ è soluzione della [1].

Ker(α) = **Ker**(A) è l'insieme soluzione del sistema omogeneo associato

$$[2] \quad A \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

e l'insieme soluzione del sistema [1] è $\underline{x}_0 + \mathbf{Ker}(A)$.

Si noti l'analogia con il caso delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

Chiaramente, la soluzione del sistema [1] è unica, se **Ker**(A) = { $\underline{0}$ }, il che significa che la matrice A ha rango r uguale al numero n delle colonne, cioè delle incognite componenti del vettore \underline{x} ; ciò significa anche che l'applicazione lineare α è iniettiva. Nel caso generale risulta $r < n$, il **Ker** ha dimensione $n-r$, e ciò significa, in termini algebrici, che $n-r$ incognite possono assumere valori ar-

bitrari o, come si dice, il sistema ha ∞^{n-r} soluzioni. ($\text{Dim}(\mathbf{Ker}(A)) = n-r$).

Risoluzione di un sistema lineare.

Il metodo di risoluzione più semplice è la riduzione *a scala* che risale a Gauss. Esso consiste nel portare a zero i coefficienti della matrice A al di sotto degli elementi diagonali $a_{k,k}$ sommando agli elementi della j^{ma} riga (j da $k+1$ ad m) al di sotto della k^{ma} gli elementi della riga k^{ma} moltiplicati per $-a_{j,k} / a_{k,k}$. Gli elementi diagonali $a_{k,k}$ si chiamano pivots. Ovviamente, la stessa operazione va applicata ai termini noti.

Alla fine si ottiene l'ultima equazione (riga) con una sola incognita: x_r e, procedendo a ritroso, si ricavano le incognite x_{r-1}, \dots, x_2, x_1 . Naturalmente, ciò accade se il sistema è compatibile.

Il rango r è dato dal numero dei pivots diversi da zero; non solo, ma se la matrice A è quadrata, il prodotto dei pivots fornisce il famoso determinante di una matrice quadrata, come sottoprodotto del procedimento di Gauss.

Che succede se, prima di aver completato la riduzione a scala, un pivot è zero? O si somma alla riga di tale pivot una riga successiva (il determinante di A, se quadrata, non cambia), o si scambia tale riga con una successiva (annotarsi in tal caso il cambiamento di segno per l'eventuale determinante), o si scelgono i pivots, scendendo di riga in riga, seguendo un opportuno criterio.

Forse è meglio qualche esempio. Per altri esempi vedere nel mio sito la cartella "Esercizi di matematica", sottocartella "Algebra lineare e geometria".

Esempio 1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 7 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 8 \\ -7x_1 + 7x_2 - 14x_3 + 4x_4 = k \\ 8x_1 + 9x_2 - x_3 + 27x_4 = 43 \end{cases} . \text{ Si noti che il vettore termine noto } \mathbf{b} \text{ dipende dal parametro } k, \text{ perciò}$$

il sistema sarà compatibile solo se si sceglie k in modo che \mathbf{b} appartenga a $\text{Im}(A)$.

Scriviamo la matrice del sistema:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 5 & 7 & 1 & 2 & -1 & 5 & 7 & 1 & 2 & -1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 4 & 2 & 8 & 0 & -7 & 7 & -13 & -13 & 0 & -7 & 7 & -13 & -13 \\ -7 & 7 & -14 & 4 & k & \rightarrow & 0 & 21 & -21 & 39 & | & 49+k & \rightarrow & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 10+k \\ 8 & 9 & -1 & 27 & 43 & 0 & -7 & 7 & -13 & -13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} .$$

Se k è diverso da -10, la 3^a riga dà un'uguaglianza falsa: il sistema è incompatibile.

Si noti che in tal caso $\text{Rango}(A)=2$, diverso dal $\text{Rango}(A|\mathbf{b})=3$, d'accordo col teorema di Capelli.

Se $k = -10$, si hanno due righe di zeri ($\text{Rango}(A) = \text{Rango}(A|\mathbf{b}) = 2$: due soli pivots diversi da ze-

ro, $a_{11} = 1$ e $a_{22} = -7$); si ottengono $\infty^{4-2} = \infty^2$ soluzioni. Posto $x_3=a$, $x_4=b$, risalendo si ricava $x_2=13/7 + a - 13b/7$, $x_1=7 - 2(13 + a - 13b/7) + a - 5b = 23/7 - a - 9b/7$. Ordinando:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{23}{7} - a - \frac{9}{7}b \\ x_2 = \frac{13}{7} + a - \frac{13}{7}b \\ x_3 = a \\ x_4 = b \end{cases} .$$

Si noti che per $a=b=0$ si ha una soluzione particolare $x_1=23/7$, $x_2=13/7$, $x_3=0$, $x_4=0$, mentre la parte contenente i parametri dà il $\text{Ker}(A)$, una cui base si ottiene ponendo una volta $a=1$, $b=0$, un'altra $a=0$, $b=1$. $\text{Base}(\text{Ker}(A)) = \{ {}^t(-1, 1, 1, 0), {}^t(-9, -13, 0, 7) \}$.

Esempio 2. In questo esempio i pivots non saranno sulla diagonale, ma in ogni riga si sceglierà l'elemento di minimo valore assoluto diverso da zero per avere alla fine frazioni col denominatore più piccolo possibile. Ciò perché si lavorerà in aritmetica *esatta* (razionale, perché i dati in ingresso appartengono al campo razionale). Se i dati in ingresso fossero *reali*, in ogni riga andrebbe scelto come pivot l'elemento di massimo valore assoluto, per minimizzare la propagazione degli errori. Ma per sistemi piccoli tale preoccupazione per la propagazione degli errori è fuori luogo.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 4 \end{cases}.$$

Scriviamo la matrice completa dei coefficienti e dei termini noti:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & \underline{-1} & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & -5 & -1 & 4 \end{array}.$$

Prendiamo come 1° pivot $a_{1,4} = -1$ (I pivots li sottolineo):

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 9 & 8 & 14 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & -9 & 0 & 3 \end{array} \rightarrow \text{(scambio la 2ª riga con la 3ª divisa per 3)} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 1 \\ 9 & 8 & 14 & 0 & 3 \end{array} \rightarrow$$

(come 2° pivot $a_{2,2} = -2$)

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & \underline{-1} & 1 \\ 0 & \underline{-2} & -3 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & \underline{2} & 0 & 7 \end{array}.$$

Il 3° pivot può essere indifferentemente $a_{3,3} = 2$ o $a_{3,1} = 9$. Ma oramai la riduzione a scala (un po' a chiocciola!) è completa e, avendo tre pivots diversi da zero, segue che il rango di A, detto anche rango del sistema, è 3 e ovviamente anche il rango della matrice completa è 3: non ci sono altre ri-

ghe. Il sistema è compatibile con ∞^1 soluzioni.

Posto $x_1 = \lambda$, a ritroso trovo: $x_3 = 7/2 - 9\lambda/2$, $x_2 = -23/4 + 27\lambda/4$, $x_4 = -17/4 + 17\lambda/4$. Ordinando:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \frac{-23}{4} + \frac{27}{4}\lambda \\ x_3 = \frac{7}{2} - \frac{9}{2}\lambda \\ x_4 = \frac{-17}{4} + \frac{17}{4}\lambda \end{cases}.$$

Esempio3. In questo esempio terremo nota dei pivots per il calcolo del determinante.

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 5 \\ -5x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -20 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 14 \end{cases}.$$

Scrivo la matrice e preparo $\text{Det}(A) = \underline{1} \cdot \underline{10} \cdot [-1] \cdot (\underline{-2}) \cdot \underline{2} = 40$

$$\begin{array}{cccc|c} \underline{1} & -5 & 3 & -3 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ -5 & 1 & 3 & -4 & -20 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 14 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & \underline{10} & -5 & 5 & 15 \\ 0 & -24 & 18 & -19 & -45 \\ 0 & 16 & -10 & 11 & 29 \end{array} \rightarrow 5x(0 \ 2 \ -1 \ 1 \ 3) \rightarrow \text{(tralascio il 5)}$$

(Nel prossimo passaggio scambierò la 3^a e la 4^a riga, perciò nel Det(A) compare il fattore [-1]).

$$\begin{array}{l} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{-2} & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -7 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(scambio } 3^{\text{a}} \text{ e } 4^{\text{a}} \text{ riga)} \\ \end{array} \\ \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{2} \end{array} \end{array}$$

Pertanto Det(A) = 40, Rango(A) = 4, sistema determinato: $x_4=3, x_3=2, x_2=1, x_1=3$. Ordinando:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Note.

Eugène Rouché. Francese, 1832 – 1910. Si occupò soprattutto teoria delle funzioni, serie e calcolo delle probabilità.

Alfredo Capelli. Milano 1855 – Napoli 1910. Socio dell'Accademia dei Lincei e dell'Istituto Lombardo. Professore di Analisi algebrica, prima a Palermo e poi a Napoli, lasciò importanti lavori di algebra e analisi.

Pierre Sarrus. Francese, 1798 – 1861. Fu accademico di Francia per i numerosi lavori di matematica e di astronomia. Ora è noto soprattutto per la regoletta di calcolo del determinante delle matrici quadrate di ordine 3. Per matrici di ordine diverso non funziona.

Gabriel Cramer. Ginevra 1704 – Bagnols (Francia) 1752. Fece importanti studi sulle curve algebriche, sul moto e sulla forma dei pianeti, che gli valsero la nomina alla Royal Society di Londra. E' noto purtroppo solo per la coddetta "Regola di Cramer", che di solito viene applicata, senza capire perchè funziona, per risolvere sistemi lineari, *piccoli*, altrimenti sono dolori.

Altri metodi per risolvere sistemi lineari di medie e grandi dimensioni.

(Sistemi anche con molte decine o centinaia di incognite, di solito sistemi quadrati, perché si applicano a problemi di fisica e di ingegneria che dovrebbero condurre al caso determinato, cioè ad una sola soluzione).

a) Metodo di Gauss con iterazione (lo si trova nel mio sito digilander.libero.it/ottavioserra0, cartella di Algebra Lineare). Per la spiegazione del metodo, vedi¹.

Nel sito si trova anche il programma "SistRaz", che opera su sistemi mxn in aritmetica razionale e non ha bisogno di iterazione.

Lo schema dell'iterazione.

Sia $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ il sistema di n equazioni in n incognite (sistema quadrato) e supponiamo che tutti gli elementi diagonali $a_{i,i}$ di A siano diversi da zero. Se qualche $a_{i,i}$ fosse zero, si sommi alla riga i^{ma} una riga k^{ma} con $a_{k,i}$ diverso da zero (e naturalmente si sommi a b_i b_k). Se ciò non fosse possibile, vorrebbe dire che il sistema non è determinato e amen.

Se invece è possibile, si costruisca la matrice diagonale D con gli elementi diagonali di A e si ponga $L=A-D$. Il sistema si scrive: $D\mathbf{x} = -L\mathbf{x} + \mathbf{b}$, da cui segue $\mathbf{x} = (-D^{-1}L)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}$ che scriveremo come

$$[1] \quad \mathbf{x} = H\mathbf{x} + \mathbf{k}$$

La [1] permette l'iterazione: Assunto $\mathbf{x}_0 =$ vettore iniziale arbitrario, per esempio $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, segue: $\mathbf{x}_1 = H\mathbf{x}_0 + \mathbf{k}$, $\mathbf{x}_2 = H\mathbf{x}_1 + \mathbf{k} = H^2\mathbf{x}_0 + (H+I)\mathbf{k}$, ... , $\mathbf{x}_s = H^s\mathbf{x}_0 + (H^{s-1} + H^{s-2} + \dots + H + I)\mathbf{k}$.

¹ Collana Schaum: "Analisi numerica" (per il metodo di Gauss, Gauss-Siedel, rilassamento, etc).

Se $\|H\| < 1$, H^s tende a zero al divergere di s e la serie in parentesi converge, tanto più rapidamente quanto più è piccola $\|H\|$. Perciò $\underline{x} = (H^{s-1} + H^{s-2} + \dots + H + I)\underline{k}$.

L'iterazione si può arrestare quando $\|H\| < \epsilon$, numero positivo prefissato, con un errore sul vettore soluzione \underline{x} non maggiore di $H^{s-1}\underline{k}$.

b) Metodo di Cholesky (per sistemi di medie dimensioni).

c) Metodo del gradiente coniugato (per sistemi di grandi dimensioni).

Il metodo **a)** consente di limitare la propagazione degli errori, ai quali il metodo di Gauss in aritmetica *Real* è molto sensibile, anche quando il sistema è di dimensione modesta o quando il determinante di A è piccolo in valore assoluto (Sistemi *Stiff*).

I metodi **b)** e **c)** vengono utilizzati per il calcolo delle strutture edilizie o analoghe, e richiedono che la matrice (quadrata) A dei coefficienti sia simmetrica e definita positiva.

Simmetrica vuol dire che $A = {}^tA$ (trasposta di A), cioè $a_{i,k} = a_{k,i}$; definita positiva vuol dire che per ogni vettore \underline{v} di \mathbf{R}^n si abbia $\Phi = {}^t\underline{v} A \underline{v} > 0$ (essendo ${}^t\underline{v}$ il trasposto del vettore colonna \underline{v}). Si dimostra che tale condizione è soddisfatta, se tutti gli autovalori, necessariamente reali per un operatore simmetrico, sono positivi.

Il metodo di Cholesky² consiste nel decomporre A nel prodotto di due matrici: V^* triangolare inferiore trasposta di V triangolare superiore in modo che $A = V^* \cdot V$, per cui $A\underline{x} = \underline{b}$ diventa $V^* \cdot V\underline{x} = \underline{b}$, equivalente al sistema

$$\begin{cases} V^* \underline{z} = \underline{b} \\ V\underline{x} = \underline{z} \end{cases}; \text{ la } 1^{\text{a}} \text{ equazione si risolve da } z_1 \text{ a } z_n, \text{ la } 2^{\text{a}} \text{ a ritroso, da } x_n \text{ a } x_1.$$

Ometto i particolari per ricavare V da A (Vedi Note 2 e 3).

Il metodo del gradiente coniugato si trova esposto, per es., in Capurso e in Cugiani (Note 2 e 3).

Ho implementato entrambi i metodi, di Cholesky e del gradiente coniugato, ma non li ho inseriti nel mio sito. Ora esporrò in sintesi il metodo del gradiente coniugato.

Il metodo del gradiente coniugato.³

Poniamo $f(x) = 1/2({}^t\underline{x}A\underline{x}) - {}^t\underline{b}\underline{x}$. Il gradiente di $f(x)$ è $\nabla f(x) = A\underline{x} - \underline{b}$; perciò $\nabla f(x) = 0$ se e solo se $A\underline{x} = \underline{b}$, cioè se \underline{x} è soluzione del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$. Questo significa che risolvere il sistema lineare è equivalente a trovare lo zero di ∇f e quindi il minimo di f .

Per trovare il minimo si procede iterativamente come nel metodo del gradiente. In questo, partendo all' i^{mo} passo da un punto x_i , si sceglie la direzione \underline{e}_i parallela al gradiente di f , $\nabla f(x)$, che è ortogonale⁴ alle (iper)superfici di livello, e si trova il punto successivo minimizzando f sulla retta passante per x_i , avente la direzione di \underline{e}_i .

La differenza sostanziale rispetto al metodo del gradiente è nella scelta della direzione di \underline{e}_i , che non corrisponde alla direzione di massima pendenza come nel metodo del gradiente, detto per questo metodo della più ripida discesa, ma è scelta *A_ortogonale*⁵ alle superfici di livello.

La ragione di questa scelta è che $f(x)$ è un (iper)paraboloide dilatato con coefficiente c_i sulla direzione \underline{e}_i e poi traslato. I c_i sono gli autovalori di A e gli \underline{e}_i i corrispondenti autovettori, che esistono per il **teorema spettrale**. La direzione scelta coincide con il gradiente nel paraboloide originale. Questo assicura la convergenza del metodo in $n - 1$ passi. (n è l'ordine della matrice A). Pertanto il metodo del gradiente coniugato non è veramente un metodo iterativo, ma un metodo *esatto*, salvo gli errori di arrotondamento e la loro propagazione, dovuti all'uso di un'aritmetica approssimata.

(Il teorema spettrale dice essenzialmente che un operatore simmetrico di \mathbf{R}^n ammette autovalori reali ed \mathbf{R}^n ha una base di autovettori di A , ovvero A è diagonalizzabile).

² Michele Capurso: "Introduzione al calcolo automatico delle strutture", Ediz. Scientifiche Cremonese, Roma.

³ Marco Cugiani, "Metodi dell'analisi numerica", U.T.E.T. Torino.

⁴ Cioè $\nabla f(x)$ ortogonale a ogni vettore \underline{v} del sottospazio direttore dell'iperpiano tangente: $\nabla f(x) \cdot \underline{v} = 0$.

⁵ Cioè, per ogni vettore \underline{v} del sottospazio direttore dell'iperpiano tangente, si impone $\nabla f(x) \cdot A\underline{v} = 0$.

Inversione di matrici.

Anche l'inversione di una matrice (quadrata) rientra nelle tecniche di risoluzione dei sistemi lineari. Infatti il calcolo della matrice inversa si riduce a risolvere n sistemi lineari $A\underline{c}^i = \underline{e}^i$ per $i=1..n$, essendo \underline{e}^i l' i^{mo} vettore della base canonica e \underline{c}^i l' i^{ma} colonna della matrice inversa da determinare.

Gli n sistemi si risolvono simultaneamente seguendo lo schema $A|I = I|A^{-1}$, spingendo la riduzione a scala di Gauss fino a ridurre A alla matrice identità I . Esempifico lo schema nel caso di $n=3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3} & 1, 0, 0 \\ a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3} & 0, 1, 0 \\ a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3} & 0, 0, 1 \end{array} \right).$$

Nota. Se qualche elemento diagonale (pivot) di A dovesse essere zero, si somma alla sua riga una riga sottostante. Alla fine, se A è invertibile, il prodotto dei pivots dà pure il determinante di A , altrimenti si ottiene il rango di A , ovviamente minore di n . (Vedere nel mio sito il programma eseguibile "Matriraz", matrici in aritmetica razionale, Cartella **Programmi eseguibili**, sottocartella **Algebra lineare**).

Se si lavora in aritmetica razionale (*esatta*), a destra dello schema si ottiene A^{-1} senza errori di arrotondamento. Se invece si lavora in aritmetica approssimata (numeri *reali* approssimati con numeri decimali finiti), conviene, se la matrice è grande o se il suo determinante è piccolo, eseguire una correzione con un metodo iterativo.

L'idea è la seguente: sia B un'approssimazione di A^{-1} ottenuta con lo schema di Gauss $A|I = I|A^{-1}$; si ponga $R = I-BA$, risultando R una matrice di piccola norma, se l'approssimazione B è buona. Si ottiene $BA = I-R$, $(BA)^{-1} \cdot B = A^{-1}B^{-1}B = A^{-1}$, ovvero $A^{-1} = (I-R)^{-1} \cdot B$.

Siccome $(I-R) \cdot (I+R+R^2+R^3+\dots+R^s+\dots) = I$, si ottiene $A^{-1} = (I+R+R^2+R^3+\dots+R^s+\dots) \cdot B$. La serie in parentesi converge se $\|R\| < 1$ e tanto più rapidamente quanto più la norma è piccola. La serie si tronca quando $\|R^s\| < \varepsilon$, essendo ε un numero reale positivo prefissato. Qualunque norma va bene, per esempio, detta A una matrice quadrata,

$$\|A\| = \sum_{i,k=1}^n |a_{i,k}|.$$

Questa iterazione correttiva è implementata nel mio programma eseguibile "Matreal", matrici in aritmetica *real*, reperibile nel mio sito già citato.

Perché invertire matrici?

L'inversione di una matrice (invertibile!) è un'operazione onerosa dal punto dei calcoli che occorre eseguire, essa perciò è conveniente se si devono risolvere molti sistemi quadrati con la stessa matrice dei coefficienti: $A\underline{x}_1 = \underline{b}_1$, $A\underline{x}_2 = \underline{b}_2, \dots$, $A\underline{x}_s = \underline{b}_s$, perché $\underline{x}_i = A^{-1} \cdot \underline{b}_i$ per $i=1..s$ e il lavoro di inversione di matrice viene affrontato una sola volta.