Ottavio Serra
Sezione aurea e successioni di Fibonacci.

Ricordo che la sezione aurea di un segmento è la parte **media** proporzionale tra l'intero segmento e la parte **rimanente**, ***media ed estrema ragione*** *del segmento*.

Se x è la sezione aurea di un segmento ed 1 (uno) è la parte residua, da (1+x) : x = x : 1, si ricava

[1] **x = 1 + 1/x.**

Risolvendo questa equazione di 2° grado si ottengono due soluzioni :

$$x_1 = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (\alpha > 0)$$

$$x_2 = \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad (\beta < 0).$$

Il rapporto tra α e l'intero segmento $1+\alpha$ è $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (circa 0,618). La sezione aurea sta all'interno dell'intero segmento; è il caso che si considera di solito. Invece β rappresenta la sezione aurea all'esterno di 1+x..

Dalla [1] segue lo sviluppo di $x=\alpha$ in frazione continua:

[2] **x=1+(1/(1+(1+1/(1+1(1+….))))),** che converge ad α, anche se molto lentamente.

Scrivo la [2] in forma più usuale:

$$X = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}$$

Scrivendo la [1] nella forma $x^2 = x+1$, da cui $x = \sqrt{1+x}$, si ottiene, iterando, un altro modo di scrivere il ***numero aureo*** $\boldsymbol{\alpha}$**:**

$$x = \alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}} = 1.618\dots$$

Abbiamo visto che il rapporto tra la sezione aurea (media ragione) e l'intero segmento è $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

La cosa mirabile è che la parte rimanente (**l'estrema ragione**) è **sezione aurea della sezione aurea** e così via, in un processo senza fine.

Proprietà: x è irrazionale.

Dim. Se x fosse razionale, anche x-1 lo sarebbe. Poniamo x-1= m/n . E' certamente m<n.

Dalla [1] si ricava 1/x = m/n, x = n/m e x-1 = n/m - 1 = (n-m)/m, con denominatore minore del precedente. Iterando il procedimento, si ottiene una successione di frazioni i cui denominatori formano una sequenza infinita di numeri naturali decrescenti, il ché è impossibile.

Naturalmente, si potrebbe dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{5}$ come si fa di solito per la radice quadrata di un numero primo, da cui seguirebbe l'irrazionalità del numero aureo.

Approssimazioni razionali.

Sia a/b un'approssimazione razionale di x (la determinazione positiva α), cioè della sezione aurea del segmento 1+x. Dalla [1] segue 1/x = b/a e poi x = 1+b/a = (a+b)/a. Dunque, la successiva approssimazione è una frazione che ha per numeratore la somma del vecchio numeratore e del vecchio denominatore e per denominatore il vecchio numeratore.

Se inneschiamo la sequenza delle approssimazioni con a=1 e b=1, otteniamo:

[3] 1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13,… .

Pertanto ogni approssimazione è il rapporto tra un numero della successione standard di Fibonacci e il precedente:

[4] 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … . (Successione di Fibonacci**).**

Chi ci garantisce che il limite della successione [3] è proprio

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ?$$

La successione di Fibonacci è definita ricorsivamente come segue:

[5] $$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \;, \quad \forall n > 2.$$

Cerchiamo una soluzione del tipo

$$a_n = \lambda^n$$

(per analogia con le equazioni differenziali).

Sostituendo nella [5], otteniamo un'equazione di 2° grado:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono proprio i valori precedentemente trovati α e β. Pertanto

[6] $$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Per n grande il 2° addendo è trascurabile perché β in valore assoluto è minore di 1 e perciò

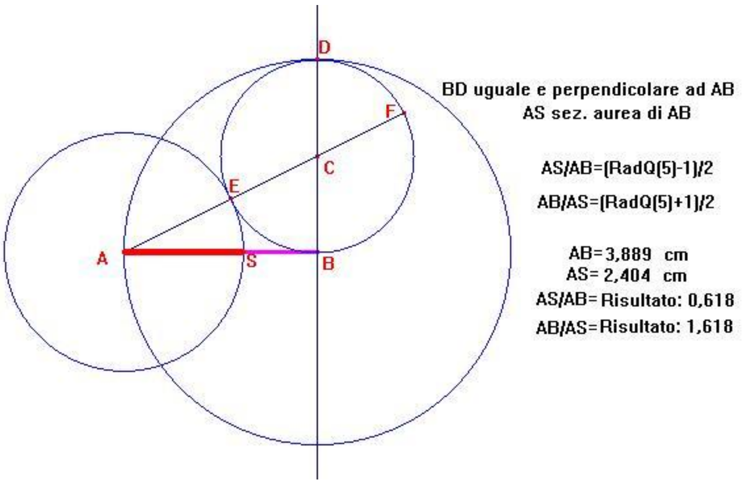
[7] $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618.$$

La particolare soluzione **[4]** della successione di Fibonacci si ottiene con le condizioni iniziali

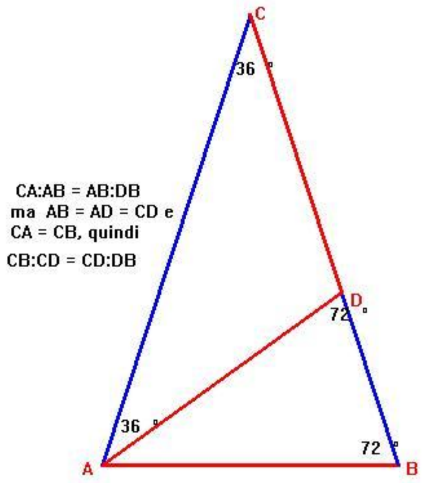
$$a_0 = a_1 = 1.$$

Sezione aurea e pentagono regolare.

Euclide pone e risolve il problema di dividere un segmento in media ed estrema ragione negli *Elementi*, Libro II, proposizione 11: ***Dividere un segmento in modo che il quadrato di una parte*** (la maggiore, ***la media ragione)***, *sia uguale* (equivalente) *al rettangolo formato dall'intero segmento e dalla parte rimanente* (***l'estrema ragione***) e nel libro VI, proposizione 30: *Dividere un segmento in media ed estrema ragione.* **a : x = x : (a - x).**
La costruzione del Libro II è basata sull'equivalenza, quella del libro VI sulle proporzioni.
La media ragione **x** è ciò che Luca Pacioli chiamava *Divina proportione* e noi ***Sezione aurea***.
La costruzione odierna, basata sul teorema della tangente e della secante a un cerchio, è più semplice. (Vedi il disegno seguente).

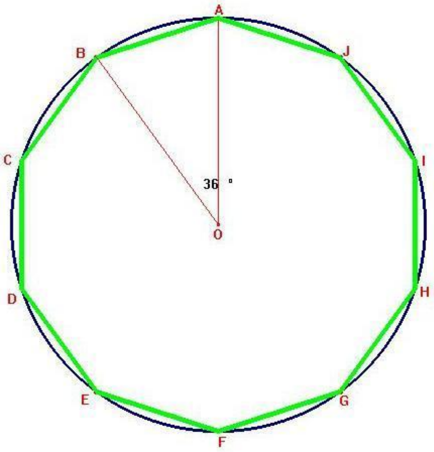


Proprietà
1° In un triangolo isoscele con l'angolo al vertice di 36° la base è la sezione aurea del lato obliquo.



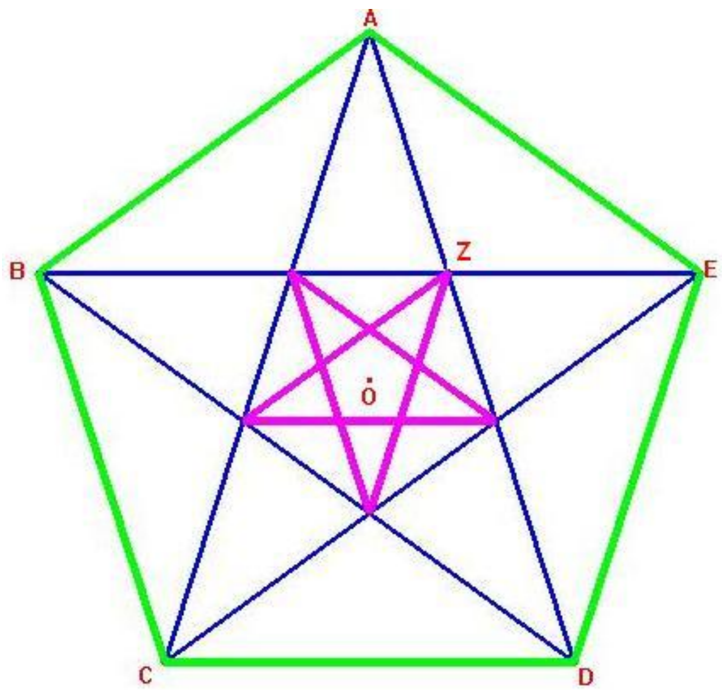
(Triangolo ***aureo***)

2° In un decagono regolare il lato è la sezione aurea del raggio del cerchio circoscritto.



Infatti il triangolo AOB ò aureo (l'angolo AOB = 36°).

3° In un pentagono regolare il lato è la sezione aurea della (di una) diagonale e
4° le diagonali si intersecano in media ed estrema ragione.



Infatti, l'angolo DBE = DOE/2 = 72°/2 = 36° e il triangolo DBE è aureo; inoltre l'angolo ZDE = 36° = CED = BEC; perciò DEZ = DZE = 72°, il triangolo ZDE è isoscele e DZ = DE = sezione aurea di DA. Inoltre anche il triangolo ZDE è aureo e ZE = ZA = sezione aurea di DZ. Dunque, Z divide DA in **media** (DZ) ed **estrema** (ZA) ragione e l'***estrema ragione*** ZA è ***media ragione*** della ***media ragione*** DZ,

Il pentagono regolare è un poligono affascinante. Già i pitagorici ne avevano scoperto le mirabili proprietà e usavano la stella a cinque punte delle sue diagonali (il ***pentagramma***) come segno di riconoscimento.