

Ottavio Serra
Introduzione alla fisica quantistica
Cap 1

Le difficoltà della fisica classica.

La fisica classica, essenzialmente dovuta a Galileo e Newton per la meccanica, a Faraday e Maxwell per l'elettromagnetismo, negli ultimi decenni dell'800 veniva considerata una costruzione praticamente definitiva. Ricorda Planck che, avendo chiesto il parere del suo maestro Kirchhoff sull'idea di scrivere la tesi di laurea sui principi della dinamica, si sentì rispondere che nel campo della meccanica non c'era più nulla di nuovo da dire, che si rivolgesse piuttosto alla termodinamica, la quale, per merito di Boltzmann conosceva una nuova fioritura.

In realtà non era tutto pacifico. L'elettromagnetismo pareva richiedere un riferimento assoluto, ma gli esperimenti di Michelson e Morley davano risultato negativo per il moto della Terra rispetto a tale riferimento (dell'etere cosmico). Del resto ciò faceva a pugno col principio di relatività di Galilei.

Come è noto, il problema del moto fu risolto da Einstein in modo inaspettato introducendo un nuovo paradigma per la relazione tra spazio e tempo. Le distanze e le durate erano relative allo stato di moto del riferimento (da cui il nome di teoria della relatività), ma lo spazio e il tempo erano fusi in un nuovo assoluto a livello più profondo (e ciò non si sottolinea mai abbastanza).

La meccanica classica è però un'approssimazione tanto più precisa della meccanica relativistica quanto più sono piccole le velocità dei corpi rispetto alla velocità della luce.

Intanto nuove difficoltà stavano spuntando nella fisica classica.

Ne elencherò alcune.

- 1) I corpi solidi incandescenti emettono luce (in generale radiazione elettromagnetica) in funzione della lunghezza d'onda e della temperatura in modo assolutamente diverso dalle previsioni fondate sull'elettromagnetismo classico e sulla termodinamica statistica di Boltzmann. La soluzione di questo problema per opera di Planck nel 1902 aprì le porte alla prima teoria dei quanti.
- 2) I calori specifici dei solidi (monoatomici) obbediscono per la maggior parte delle sostanze alla semplice legge di Dulong e Petit che si ricava in modo elementare dal principio di equipartizione dell'energia di Boltzmann. Se A è il peso atomico, c il calore specifico, $cA=3R$, essendo R la costante dei gas perfetti: $C_A=6\text{cal}/(\text{mole } ^\circ\text{K})$. Tuttavia sostanze di piccolo peso atomico come carbonio, berillio, litio, hanno calori atomici nettamente minori (solo ad alte temperature si avvicinano a 6), e cosa ancora più grave, tutti i calori atomici tendono a 0, man mano che la temperatura scende verso lo zero assoluto. Il problema fu avviato a soluzione da Einstein usando la legge dell'irraggiamento termico di Planck e risolto dal fisico olandese Debye tenendo conto del reticolo cristallino che limita le frequenze di vibrazione possibili. Di un'altra difficoltà, come mai gli elettroni dell'atomo non contribuiscono con i loro gradi di libertà all'energia cinetica media e quindi al calore specifico, non parlerò; bisognò aspettare Fermi (1926) per capirlo.
- 3) L'effetto fotoelettrico è in un certo senso il processo inverso dell'emissione di raggi X. Se un metallo è colpito da un fascio di luce, emette elettroni; però succedono cose strane. La luce deve avere una frequenza maggiore di una frequenza minima detta frequenza di soglia, altrimenti non viene emesso nessun elettrone. A parità di frequenza, aumentando l'intensità luminosa aumenta il numero degli elettroni emessi, ma non la loro velocità. Per aumentare la loro velocità occorre aumentare la frequenza. L'emissione degli elettroni è praticamente istantanea rispetto all'arrivo sul metallo del fascio luminoso, anche se l'intensità è così piccola che, secondo l'ottica classica, dovrebbero passare alcune ore perché su un elettrone si accumuli l'energia necessaria a compiere il lavoro di estrazione. Il mistero dell'effetto fotoelettrico fu chiarito da Einstein nella prima delle tre famose memorie pubblicate a Berlino nella primavera del 1905. Ricordo che in questo lavoro Einstein afferma in modo netto che i quanti di energia di Planck hanno una effet-

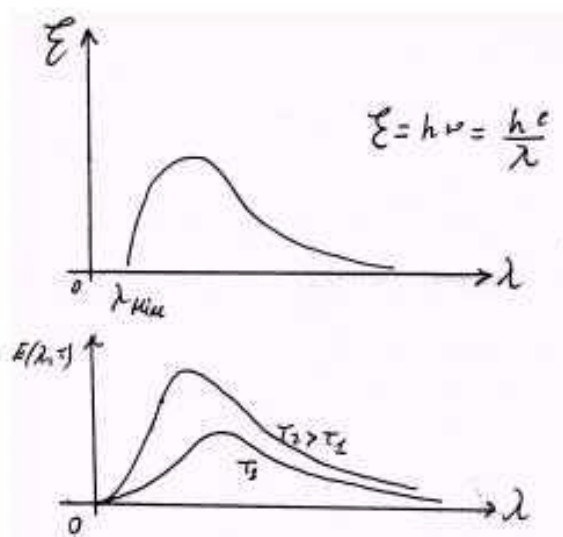
tiva realtà fisica: sono i quanti di luce in seguito detti fotoni. (Per inciso, è per questo lavoro che Einstein ebbe il premio Nobel nel 1922).

- 4) Gli atomi sono stabili, mentre secondo la meccanica classica e l'elettromagnetismo di Maxwell dovrebbero avere una vita estremamente breve. Si sa che se un satellite artificiale perde energia per una causa qualsiasi, per esempio per attrito con gli alti strati atmosferici, esso diventa sempre più veloce, la sua orbita si restringe e, incontrando strati d'aria sempre più densi, il processo si accelera e il satellite in poco tempo precipita sulla Terra o brucia nei densi strati atmosferici inferiori. *Il calcolo non è difficile. Vi propongo per esercizio di calcolare come, al diminuire dell'energia, diminuisca il raggio dell'orbita satellitare e aumenta la velocità del satellite.* Qualcosa del genere dovrebbe accadere a un atomo, per esempio all'atomo di idrogeno. Secondo il modello *planetario* di Rutherford, l'elettrone gira intorno al protone, nucleo dell'atomo di idrogeno, secondo un'orbita ellittica o circolare. In ogni caso il moto è accelerato, c'è l'accelerazione centripeta, e perciò l'elettrone dovrebbe irradiare onde elettromagnetiche. E' un fenomeno analogo a quello che accade in un'antenna radio: l'energia irradiata dall'antenna sotto forma di onde elettromagnetiche per il moto periodico degli elettroni nell'antenna stessa deve essere infatti compensata da quella fornita continuamente da un generatore, altrimenti l'antenna non funzionerebbe. Qualcosa di analogo dovrebbe accadere all'elettrone dell'atomo di idrogeno: non essendoci un apporto di energia dall'esterno, l'elettrone dovrebbe precipitare sul nucleo spiraleggiando con frequenza sempre più alta e si dovrebbero avere due conseguenze: 1°) l'atomo di idrogeno dovrebbe svanire nel giro di una diecina di nanosecondi; 2°) dovrebbe emettere uno spettro continuo di radiazione elettromagnetica troncato bruscamente verso le alte frequenze con la morte dell'atomo. Sorte analoga dovrebbero avere tutti gli altri atomi, con la conseguenza chiaramente falsa che gli atomi (e noi stessi) non esistono. Invece gli atomi esistono, sono stabili e quando sono eccitati, per esempio da una scarica elettrica, emettono uno spettro di **righe**, stabile e caratteristico della specie atomica come un'impronta digitale o il DNA di un essere vivente. Il problema dello spettro di righe fu avviato a soluzione da Bohr nel 1913; la stabilità degli atomi e la teoria generale degli spettri dovrà aspettare la nascita della meccanica quantistica. ¹

¹ Samuel Tolansky, "Introduzione alla fisica atomica", Einaudi, Torino 1950

Cap. 2 Potere emissivo del corpo nero

Ogni corpo, che non sia allo zero assoluto, emette energia sotto forma di radiazione elettromagnetica. Se la temperatura supera i 500 °C, la radiazione comincia a essere visibile dall'occhio umano, sotto forma di luce rossa, che diventa poi gialla, bianca, azzurra man mano che la temperatura cresce. Esaminati allo spettroscopio, mentre i gas rarefatti emettono luce sotto forma di uno spettro discreto (spettro a righe) caratteristico per ogni specie atomica, i corpi condensati, liquidi o solidi, emettono uno spettro continuo, dall'infrarosso al visibile (rosso - violetto), all'ultravioletto. Non bisogna credere che un corpo emetta luce solo per agitazione termica. Un metallo bombardato con elettroni veloci emette uno spettro continuo (di raggi X) che ha un profilo di intensità spettrale diverso dalla radiazione termica; in particolare, lo spettro ha un taglio netto in corrispondenza di una lunghezza d'onda minima corrispondente alla massima energia degli elettroni proiettili. (Vedi il primo disegno sottostante). Il secondo disegno dà l'andamento sperimentale dell'emissione termica di un corpo nero a due temperature diverse secondo i fisici tedeschi Lummer e Pringsheim, verso la fine dell'800.



I fisici di fine '800 affrontarono il problema di trovare la legge matematica di tale radiazione, utilizzando la fisica classica: meccanica, elettromagnetismo e termodinamica, ma senza successo. Secondo la meccanica statistica di Maxwell e Boltzmann, il numero dei gradi di libertà (oscillatori lineari) contenuti nell'unità di volume nella banda di frequenza $[\nu, \nu+d\nu]$ è

$$dN = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu .$$

Perciò la densità dell'energia di radiazione in equilibrio termico dentro una cavità è

$$u(\nu, T) = \frac{dU}{d\nu} = dN \bar{\mathcal{E}} / d\nu = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \bar{\mathcal{E}}$$

essendo $\bar{\mathcal{E}}$ l'energia media di un oscillatore lineare.

I fisici inglesi Rayleigh e Jeans usarono per questa energia media il risultato classico kT , essendo k la costante di Boltzmann, $k=R/N$, perciò si ottiene

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT [J / m^3 \cdot Hz].$$

Perciò la densità integrale (su tutte le frequenze) è **infinita!**

Ciò che si determina più facilmente è il potere emissivo di un corpo, cioè l'energia emessa in un secondo dall'unità di superficie in tutte le direzioni, nella banda di frequenza di 1 Hz:

$$e(\text{corpo}, \nu, T) = \frac{dW}{dt \cdot dS \cdot d\nu} [J / s \cdot m^2 \cdot Hz].$$

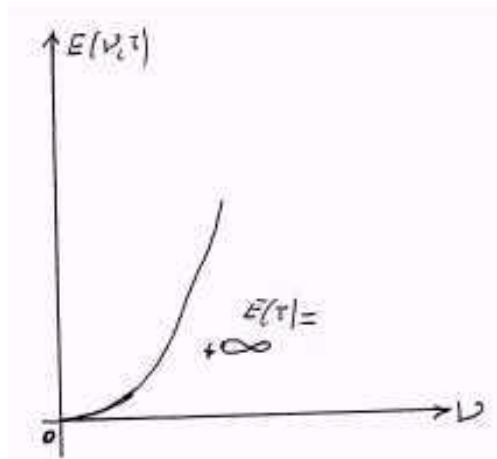
Accanto al potere emissivo va considerato il potere assorbente di un corpo, che è la percentuale di energia assorbita su quella incidente. Anche il potere assorbente dipende dal corpo, oltre che dalla frequenza e dalla temperatura, ma il rapporto, come dimostrò Kirckoff per via termodinamica, è indipendente dal corpo,

$E(\nu, T) = \frac{e(\text{corpo}, \nu, T)}{a(\text{corpo}, \nu, T)}$ ed è detto potere emissivo del corpo nero, perché si riduce ad e per $a=1$ (corpo nero).

Il legame tra potere emissivo del corpo nero e densità dell'energia in equilibrio termico è il seguente: $E(\nu, T) = c/4 \cdot u(\nu, T)$, pertanto

$$[1] \quad E(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 kT.$$

Ma questa legge è disastrosamente errata, perché, integrando su tutte le frequenze, si avrebbe potere emissivo infinito o, se volete, densità di energia infinita, il che è assurdo. (Vedi figura sottostante).



Finalmente nel 1902 Max Planck risolse il mistero, immaginando l'emissione di radiazione non come un processo continuo, ma discreto; il corpo emetterebbe l'energia raggiante in pacchetti non divisibili, detti appunto **quanti** (quantità discrete).

Planck, servendosi anche di un famoso risultato di Wien, ottenuto per via termodinamica, cioè che

$E(\nu, T) = \nu^3 f(\nu / T)$, dove però f è una funzione che la fisica classica non è in grado di determinare, fece l'ipotesi che l'energia fosse emessa per pacchetti non frazionabili, detti *quanti*. Con ciò ottenne che l'energia media di un oscillatore lineare non è kT , bensì

$$\frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}$$

essendo ε_0 l'energia del quanto. Segue che il potere emissivo è

$$E(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2} \nu^2 \frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}} - 1}$$

Dovendo però la formula rispettare il risultato di Wien, deve essere $\varepsilon_0 = h\nu$ e infine

$$[2] \quad E(\nu, T) = \frac{2\pi}{c^2} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

dove h è una nuova costante universale, avente la dimensione di un'azione (energia x tempo), ora detta costante di Planck. La [2], mediante due misure di E a due assegnate frequenze, nota la temperatura, consente di determinare le due costanti (c è nota: $3 \cdot 10^8$ m/s) h e k :

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}, k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J / } ^\circ\text{K}$$

Siccome per la radiazione dall'infrarosso ai raggi X è più agevole misurare lunghezze d'onda che non frequenze, la [2] si scrive, ricordando che $\nu = c/\lambda$ e che di conseguenza $d\nu = \frac{-c}{\lambda^2} d\lambda$,

$$[3] \quad E(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}$$

Derivando la [3] rispetto a λ si ottiene la legge dello spostamento di Wien: il prodotto tra la temperatura della sorgente e la lunghezza d'onda di massimo potere emissivo è una costante che vale circa

$$0,29 \text{ cm.}^\circ\text{K}: \frac{hc}{k\lambda T} = x, \text{ dove } x, \text{ soluzione dell'equazione } 5 - 5e^{-x} - x = 0, \text{ vale } 4,96 \text{ perciò}$$

$$\lambda T = hc/k \cdot 4,96 = 0,29 \text{ cm.}^\circ\text{K}.$$

Per esempio, lo spettro della fotosfera solare ha il massimo a 4800 \AA , perciò risulta $T = 6000 \text{ }^\circ\text{K}$.

Si noti che 4800 \AA cade nel giallo verde in cui l'occhio umano ha il massimo di sensibilità. E' un caso?

Si sarebbe potuto derivare la [2] rispetto a ν . Si trova che il rapporto tra la frequenza di massimo

poter emissivo e la temperatura è $\frac{\nu}{T} = 2,83 \frac{k}{h} = 5,89 \cdot 10^{10}$ e il massimo potere emissivo, nel caso

del Sole, cade a una frequenza corrispondente alla riga di 8500 \AA , cioè nell'infrarosso. Ciò dipende dal fatto che la [2], come la [3] è una funzione densità (che dà la densità di probabilità di emissione dei fotoni di data energia, se la si divide per il fattore di *normalizzazione* $E(T)$, cioè per il potere emissivo integrale su tutte le frequenze). Ma la banda di frequenza di 1 Hz, non ha niente a che vedere con la banda unitaria in lunghezza d'onda (1cm, 1 metro, 1 A° ?). Però il fatto fisico che la temperatura del Sole è $6000 \text{ }^\circ\text{K}$ è ricavabile ugualmente dall'una o dall'altra formula.

Se poi integriamo la [2] su tutte le frequenze o la [3] su tutte le lunghezze d'onda, otteniamo la legge di Stefan Boltzmann: il potere emissivo integrale risulta proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta:

$$E(T) = \sigma T^4, \text{ dove } \sigma = 5,65 \cdot 10^{-8} \frac{\text{watt}}{\text{m}^2 (\text{°K})^4}.$$

Il valore di σ era stato trovato sperimentalmente da Stefan e dall'italiano Bartoli; Boltzmann aveva giustificato termodinamicamente la proporzionalità di E alla quarta potenza di T , ma la legge di Planck consente di ricavare σ dalla conoscenza delle costanti universali h e k .

Esercizio.

Determinare il potere emissivo integrale e l'energia totale irradiata dal Sole in un secondo, conoscendo:

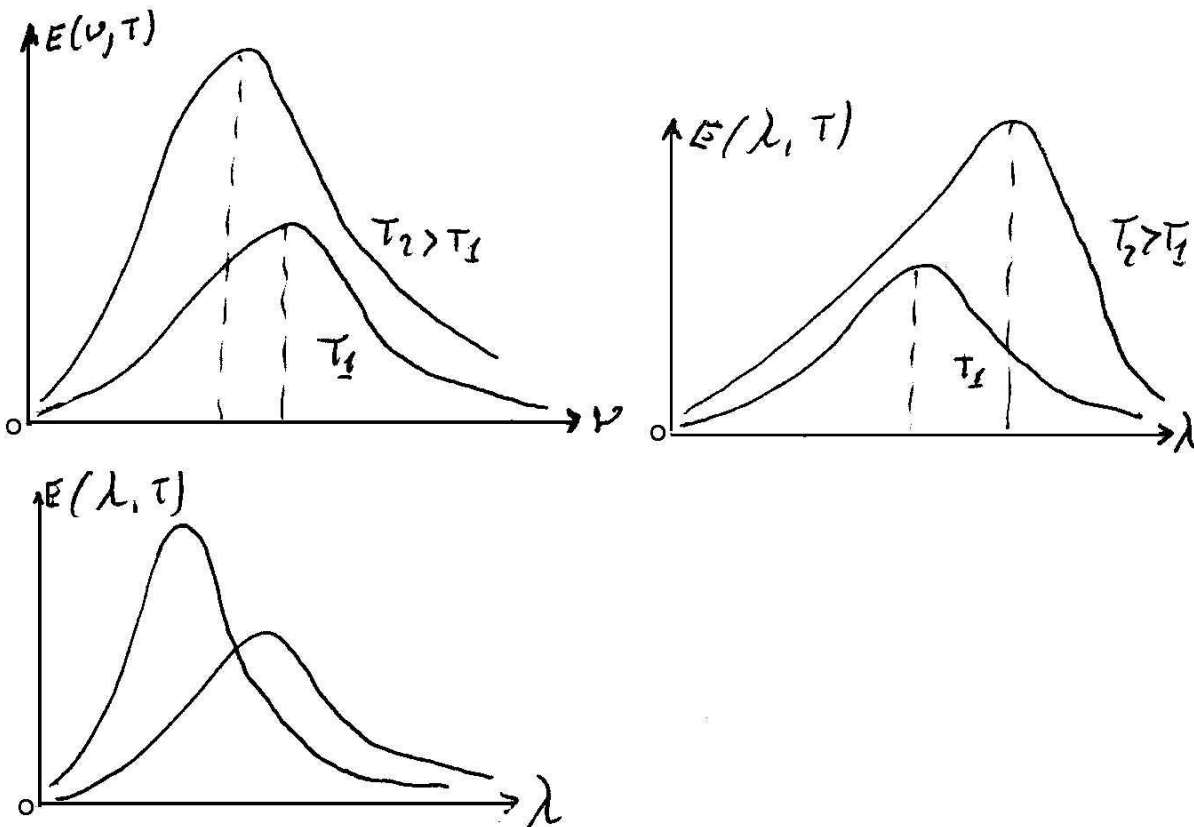
- a) la costante solare di 2 calorie / (minuto.cm²) cioè l'energia che cade in un minuto su un centimetro quadrato della superficie terrestre, corretta dell'assorbimento atmosferico;
- b) la distanza Terra _ Sole di 150 milioni di Km;
- c) il raggio del Sole di 670 mila Km.

Dal potere emissivo integrale e dalla legge di Stefan Boltzmann dedurre la temperatura della superficie del Sole; dalla potenza totale irradiata, dedurre la massa perduta ogni secondo dal Sole.

Se, con gli astronomi, ammettiamo che il Sole abbia ancora una *vita* di 5 miliardi di anni, quanta massa avrà perduto il Sole da oggi a quella data?

Siccome la massa odierna del Sole è di $2 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$, quale percentuale di questa massa avrà perduto tra 5 miliardi di anni?

Quesito. Le curve seguenti riguardano l'emissione di corpo nero. In ciascuno dei tre disegni c'è un errore: individuarlo.



Cap. 3

Calori specifici, Effetto fotoelettrico, Effetto Compton.

Calori specifici dei solidi

Secondo il principio di equipartizione dell'energia di Boltzmann, ad ogni grado di libertà di un oscillatore corrisponde un'energia cinetica media pari a $1/2KT$, essendo $K = R/N$ la costante di Boltzmann e T la temperatura assoluta. Per un atomo, che ha tre gradi di libertà (le tre coordinate spaziali), l'energia cinetica media è $3/2KT$. Un atomo in un solido monoatomico (metalli, etc), essendo vincolato nel reticolo cristallino, avrà anche un'energia potenziale il cui valore medio è uguale all'energia cinetica media, pertanto l'atomo avrà un'energia totale media di $3KT$. Una mole di solido monoatomico è formata da N atomi, essendo N il numero di Avogadro, perciò l'energia totale di una mole è $U=3RT$. Il calore molare (a volume costante) è quindi

$$C_v = Ac = \frac{\Delta U}{\Delta T} = 3R.$$

Questa è la famosa legge di Dulong e Petit, che però fallisce completamente alle basse temperature e per solidi di piccolo peso atomico.

Einstein nel 1907 ebbe l'idea di applicare l'ipotesi dei quanti di Planck al problema dei calori specifici. Scrisse la legge di Planck nella forma

$$E(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} [h\nu / (e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1)],$$

si nota che l'energia media di un oscillatore lineare è l'espressione in parentesi quadra, che si riduce al valore classico KT per energia del quanto $h\nu$ piccola rispetto all'energia termica KT .

Seguendo Einstein risulta allora che l'energia di una mole di solido monoatomico sarà

$$U = 3N[h\nu / (e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1)] = 3(R / K)[h\nu / (e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1)].$$

N è il numero di Avogadro, il fattore 3 è dovuto al fatto che un atomo ha, globalmente, 3 gradi di libertà. (Per individuare un punto nello spazio occorrono tre coordinate).

Derivando rispetto a T , si trova

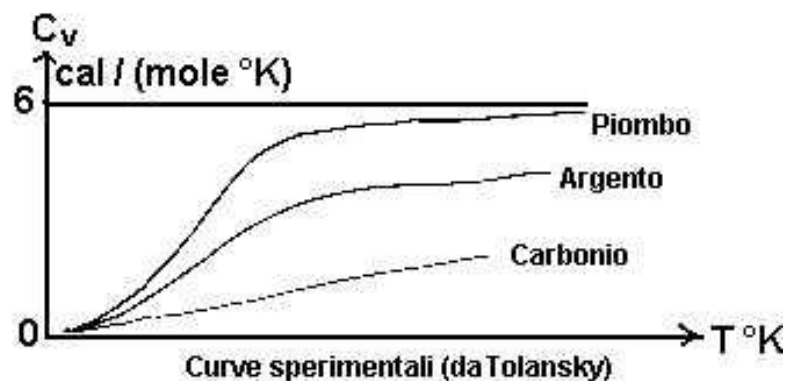
$$C_v = Ac = 3R.e^{\frac{h\nu}{KT}} (h\nu / KT)^2 / [e^{\frac{h\nu}{KT}} - 1].$$

Questa formula è abbastanza d'accordo con le curve sperimentali, ma fallisce alle bassissime temperature, che intanto il fisico Kamerling Onnes era riuscito a realizzare a Leida, in Olanda.

Verso il 1912 Debye, considerando che in un solido ci sono vibrazioni longitudinali e trasversali, e che le frequenze di vibrazione devono avere un massimo dipendente dalla natura del solido, migliorò il risultato di Einstein e trovò una formula che si accorda dettagliatamente con i valori sperimentali. In particolare, per temperature prossime allo zero assoluto, la formula giustifica il risultato sperimentale, precedentemente stabilito dallo stesso Debye, che il calore molare (atomico) è proporzionale al cubo della temperatura assoluta. (Vedi grafici nella pagina successiva).

In realtà i problemi non erano finiti. Come mai gli elettroni atomici non contribuiscono con i loro gradi libertà al calore specifico? Per esempio, per la molecola di elio ai tre gradi di libertà traslatoria dell'atomo in blocco si dovrebbero aggiungere i 6 gradi di libertà dei due elettroni orbitali e quindi l'energia cinetica media dovrebbe essere $3/2KT+3KT$ da cui discende che, alle alte temperature alle quali è valida la fisica classica, il calore atomico dell'elio a volume costante dovrebbe essere non $3/2R$, bensì $9/2R$, il che è chiaramente falso. Lo stesso dicasi per le altre sostanze; le cose vanno come se gli elettroni avessero la loro energia congelata ai fini del calore specifico.

Solo la teoria quantistica completa di Heisenberg e di Fermi diede conto di questo comportamento.



Effetto fotoelettrico

La spiegazione dell'effetto fotoelettrico, secondo Einstein, è un'immediata conseguenza dell'esistenza dei quanti di luce o fotoni, come effettive particelle che portano energia e quantità di moto, anche se hanno massa zero.

Detta ν la frequenza dei fotoni, h la costante di Plank, si ha:

$$[1] \quad \frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W_e$$

cioè, l'energia cinetica (massima) degli elettroni emessi è uguale all'energia del fotone incidente meno il lavoro di estrazione. Dalla [1] ponendo uguale a zero l'energia cinetica dell'elettrone si ricava la frequenza di soglia:

$$\nu_0 = \frac{W_e}{h}$$

Si capisce come l'energia cinetica degli elettroni emessi dipenda solo dalla frequenza e non dall'intensità del fascio luminoso. Si capisce anche perché l'emissione è praticamente istantanea, per quanto piccola sia l'intensità luminosa. L'intensità luminosa è l'energia di un fotone per il numero di fotoni che in un secondo arrivano sull'unità di superficie del bersaglio e si spiega così come un aumento dell'intensità luminosa, a parità di frequenza, abbia il solo effetto di aumentare il numero di elettroni emessi nell'unità di tempo e quindi la corrente elettrica misurata.

Effetto Compton

Questo effetto, scoperto da Arthur Compton nel 1922, mostra in modo evidente che il fotone è a tutti gli effetti una particella dotata di energia e di quantità di moto, come già aveva mostrato Einstein. Se un fascio di raggi X colpisce gli elettroni di un bersaglio, preferibilmente di basso peso atomico, i raggi X diffusi hanno una lunghezza d'onda lievemente maggiore, dipendente dall'angolo di diffusione. Applicando la conservazione dell'energia e della quantità di moto all'urto fotone - elettrone, nella formulazione relativistica date le alte velocità, si trovano i seguenti risultati:

$$[2] \quad \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \alpha) = 0,024(1 - \cos \alpha)$$

dove λ' e λ sono misurate in Å (Angstrom), h è la costante di Planck, m la massa dell'elettrone colpito, c la velocità della luce. L'effetto avverrebbe anche con luce ultravioletta o addirittura visibile, ma la differenza tra la lunghezza d'onda del fotone diffuso e quella del fotone incidente è così piccola che non sarebbe osservabile con lunghezze d'onda maggiori di quelle dei raggi X.

Inoltre conviene che gli elettroni facciano parte di atomi di basso peso atomico, così sono debolmente legati e, rispetto alla grande energia dei fotoni incidenti, sono da considerarsi praticamente liberi. Per gli elettroni interni appartenenti ad atomi di alto peso atomico l'energia di legame è così forte che, quando un fotone colpisce l'elettrone, è l'atomo intero che subisce il rinculo, perciò la massa m dell'elettrone va sostituita con quella dell'intero atomo che è alcune migliaia di volte maggiore e l'effetto di diffusione avviene praticamente senza variazione di lunghezza d'onda.

Nel 1925 Compton e Simon misurarono anche l'angolo di rimbalzo dell'elettrone colpito. Detti α e β gli angoli del fotone diffuso e dell'elettrone di rimbalzo rispetto alla direzione del fotone incidente, (α e β sono naturalmente in semipiani opposti rispetto alla direzione del fotone incidente), si trova

$$[3] \quad \text{Tang}(\beta) = \frac{1}{1 + \frac{h}{mc\lambda}} \text{Cot} g(\alpha/2)$$

Si noti che, essendo α compreso tra 0° e 180° , β non supera 90° , cioè l'elettrone Compton è sempre spinto in avanti, come è intuitivo attendersi.

Per la giustificazione delle formule relative all'effetto Compton si veda ².

Modello ondulatorio e modello corpuscolare per la luce.

Il modello ondulatorio interpreta molto bene i fenomeni di diffrazione e di interferenza e consente di misurare direttamente la lunghezza d'onda. Se, per esempio, un fascio luminoso collimato (raggi paralleli) attraversa un reticolo di passo p , su uno schermo (lastra fotografica, retina dell'occhio), si ha luce se $n\lambda = p.\text{sen}(\alpha)$, essendo n un numero intero, λ la lunghezza d'onda, α l'angolo di deflessione rispetto alla direzione del fascio incidente.

D'altra parte l'effetto fotoelettrico, e ancor di più l'effetto Compton, impongono un modello corpuscolare, corroborato dal fatto che, se l'intensità del fascio è molto piccola, la luce arriva sul rivelatore in quantità discrete ben evidenti con un fotomoltiplicatore. Oramai non c'è dubbio che la luce consista di particelle. L'intensità energetica I di un fascio di luce si deve intendere come il prodotto dell'energia $\varepsilon = h\nu$ di un singolo fotone per il numero di fotoni al secondo che arrivano sull'unità di superficie del rivelatore. (Per semplicità considero un fascio monocromatico):

$$I = \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{n\varepsilon \cdot \Delta S \cdot \Delta l}{\Delta S \cdot \Delta t} = \varepsilon \cdot n \cdot c$$

ΔW è l'energia contenuta in un cilindro di base ΔS e altezza Δl , n è il numero di fotoni per unità di volume, $\Delta l/\Delta t = c$ è la velocità dei fotoni (della luce).

Il legame tra modello corpuscolare e modello ondulatorio per la radiazione è data dalle seguenti relazioni:

$$[3] \quad \varepsilon = h\nu, \quad p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Modello corpuscolare e modello ondulatorio per le particelle materiali.

La relazione $p = h/\lambda$ è stata ipotizzata da De Broglie come valida in generale per tutte le particelle e non solo per i fotoni. Per esempio, a un elettrone di massa m e velocità v è associata una lunghezza d'onda

² Enrico Persico, "Gli atomi e la loro energia", Zanichelli, Bologna 1961

$$[4] \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

nell'ipotesi di velocità piccole rispetto a c .

Se, per esempio, un elettrone è accelerato dalla tensione di 100 Volt, la sua velocità è di 6000 Km/s e la lunghezza d'onda associata è di circa 1 Å, cade cioè nella banda dei raggi X.

Se ciò è vero, un fascio di elettroni deve mostrare fenomeni di interferenza e di diffrazione come un fascio di luce (o di raggi X).

La diffrazione di elettroni fu osservata la prima volta da Davisson e Germer nel 1925.

Naturalmente ciò non significa che gli elettroni siano onde, significa solo che la probabilità di trovare un elettrone in un certo posto ha una distribuzione la cui legge matematica ha aspetto ondulatorio.

Relazione tra lunghezza d'onda ed energia di una particella.

- a) Per i fotoni. Siccome questi hanno massa zero, si deve necessariamente applicare la relatività. Perciò, misurando la lunghezza d'onda in Å e l'energia in eV, dalle [3] si ottiene:

$$[5] \quad \lambda = \frac{12422}{\varepsilon} .$$

- b) Per gli elettroni. (in generale per le particelle materiali, aventi cioè massa diversa da zero).

Nell'ipotesi di velocità piccole rispetto a quella della luce, essendo $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$, si ricava

$$p = \sqrt{2m\varepsilon} \text{ e perciò}$$

$$[6] \quad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m\varepsilon}} = \frac{12,345}{\sqrt{\varepsilon}} . \text{ (} h=6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Joule.secondo, } m_{\text{elettrone}}=0,91 \cdot 10^{-30} \text{ Kg).}$$

Si misura al solito λ in Å ed ε in eV³. Il numeratore 12,345 va bene per gli elettroni; per altre particelle va cambiato in base alla massa.

Se però la particella materiale ha velocità relativistica, la [6] va sostituita con

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{(\varepsilon/c)^2 - (mc)^2}} .$$

Si noti che se h fosse zero, non ci sarebbero fenomeni ondulatori. Si dice che $h \rightarrow 0$ dà il limite classico per la meccanica quantistica, come c tendente all'infinito dà il limite classico per la meccanica relativistica.

³ Piero Caldirola: " Dalla microfisica alla macrofisica", Mondadori, Milano 1975

Cap. 4

L'atomo di idrogeno secondo Bohr

Dopo gli esperimenti conclusivi di Rutherford e dei suoi discepoli (1911 - 12), non c'era dubbio che l'atomo avesse quasi tutta la massa concentrata nel nucleo (di dimensioni da diecimila a centomila volte minori delle dimensioni atomiche) e che gli elettroni fossero disposti intorno al nucleo come pianeti intorno al Sole. Ma abbiamo visto che in tal caso l'atomo sarebbe stato instabile e, durante la sua brevissima vita, avrebbe dovuto irradiare uno spettro continuo.

Nel 1913 Bohr risolve il problema per l'atomo di idrogeno, mediante una teoria di compromesso tra la fisica classica e la nuova idea dei quanti di Plank.

I postulati avanzati da Bohr sono i seguenti:

- l'atomo può esistere in stati stazionari di energia nei quali non irradia (livelli energetici);
- l'atomo può passare da un livello energetico a uno più basso, emettendo l'eccesso di energia sotto forma di un fotone di frequenza pari alla differenza di energia dei livelli divisa per la costante di Planck; naturalmente, se assorbe un fotone della giusta energia, passa dal livello energetico inferiore a quello superiore;
- l'orbita di un elettrone intorno al nucleo è *quantizzata*, cioè non può avere un raggio qualsiasi, ma tale che il suo momento angolare sia un **multiplo intero di $h/(2\pi)$** :

$$mvr = n \frac{h}{2\pi}. \text{ Siccome spesso } h \text{ compare divisa per } 2\pi, \text{ tale rapporto si suole indicare con il}$$

simbolo \hbar , che si legge "h tagliato".

Per il resto Bohr ammette le leggi della meccanica classica e dell'elettromagnetismo.

La teoria è svolta in ambito non relativistico, perché alla fine si trova che, almeno per gli atomi più leggeri, come l'atomo di idrogeno, le velocità orbitali dell'elettrone sono piccole rispetto a quella della luce. Inoltre Bohr si limita per semplicità ad orbite circolari. Siccome le formule sono analoghe per atomi *idrogenoidi*, cioè per atomi che hanno perduto tutti gli elettroni salvo uno (idrogeno neutro, elio ionizzato una volta, litio ionizzato due volte, ecc), noi tratteremo tale caso. Detto Z il numero atomico, la carica nucleare è $+Ze$, la carica dell'elettrone $-e$. Useremo le formule classiche della forza centripeta e dell'energia; ricaveremo invece la quantizzazione dell'orbita dalla legge di De Broglie. Indicheremo inoltre con k la costante di Coulomb $1/4\pi\epsilon_0$, per semplicità di scrittura. ($k \cong 9 \cdot 10^9$).

$$[1] \quad \frac{kZe^2}{r^2} = \frac{mV^2}{r} \quad (\text{Attrazione elettrica} = \text{forza centripeta}).$$

$$[2] \quad E = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{kZe^2}{r} \quad (\text{Energia totale}).$$

$$[3] \quad 2\pi r = n\lambda = n \frac{h}{mV} \quad (\text{Perché si formi un'onda stazionaria, la circonferenza deve}$$

contenere un numero intero di lunghezze d'onda. Si noti l'analogia e la differenza con un tubo pieno d'aria chiuso agli estremi; perché si formino onde acustiche stazionarie, la lunghezza del tubo deve contenere un numero intero di *fusi*, cioè un numero intero di semi lunghezze d'onda. Nel caso di una linea chiusa come la circonferenza, le onde si devono raccordare non solo in ampiezza ma anche in fase, cioè per l'onda in ogni punto della circonferenza si richiede la continuità dell'onda e della sua tangente, la derivata).

Risolvendo il sistema delle tre equazioni [1], [2], [3] si ottengono i seguenti risultati:

$$[4] \quad r = \frac{h^2 n^2}{4\pi^2 m k Z e^2}$$

$$[5] \quad V = \frac{2\pi k Z e^2}{h n}$$

$$[6] \quad E = -\frac{2\pi^2 m k^2 e^4}{h^2} \frac{Z^2}{n^2}.$$

Se introduciamo la così detta costante di Rydberg $R = \frac{2\pi^2 m k^2 e^4}{h^2} = 13,6 \text{ eV}$, la [6] si scrive

$$[7] \quad E = -R \frac{Z^2}{n^2} \quad (Z = 1 \text{ per l'atomo di idrogeno}).$$

Dalla [5] si ricava che la massima velocità orbitale dell'elettrone si ha nel primo livello ($n=1$). Per

l'atomo di idrogeno $V_1 = \frac{2\pi k e^2}{h} = 2,186 \cdot 10^6 \text{ m/s} \approx \frac{1}{137} c$ e si giustifica l'approssimazione

non relativistica. Chiaramente per atomi più pesanti l'approssimazione classica è sempre meno buona e per un elettrone k dell'uranio è essenziale una trattazione relativistica. Ma in ogni caso ci sono buoni motivi per considerare la teoria di Bohr una descrizione provvisoria del comportamento interno degli atomi; solo per l'idrogeno, per l'elio ionizzato e in pochi altri casi la teoria dà risultati quantitativi vicini ai valori sperimentali; fallisce però completamente se l'atomo ha più di un elettrone, per esempio nel caso dell'elio neutro.

Dalla [7] si ricavano le lunghezze d'onda della radiazione emessa da un atomo idrogenoide eccitato, (per esempio con scariche elettriche in un tubo di Plucker) che ritorna allo stato fondamentale. Per l'idrogeno che ritorna a un livello inferiore n' da un livello eccitato n , si ha

$$V_{n,n'} = \frac{E_n - E_{n'}}{h} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) / h \quad (n > n').$$

Per ottenere la lunghezza d'onda si usa la formula $\lambda = \frac{12375}{h\nu}$, λ in Å , $h\nu$ in eV.

Per $n'=1$ si ha la serie di Lyman $h\nu_{n,1} = R \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

Per $n=2$ si ha la riga più intensa o di risonanza $\lambda = 1213 \text{ Å}$;

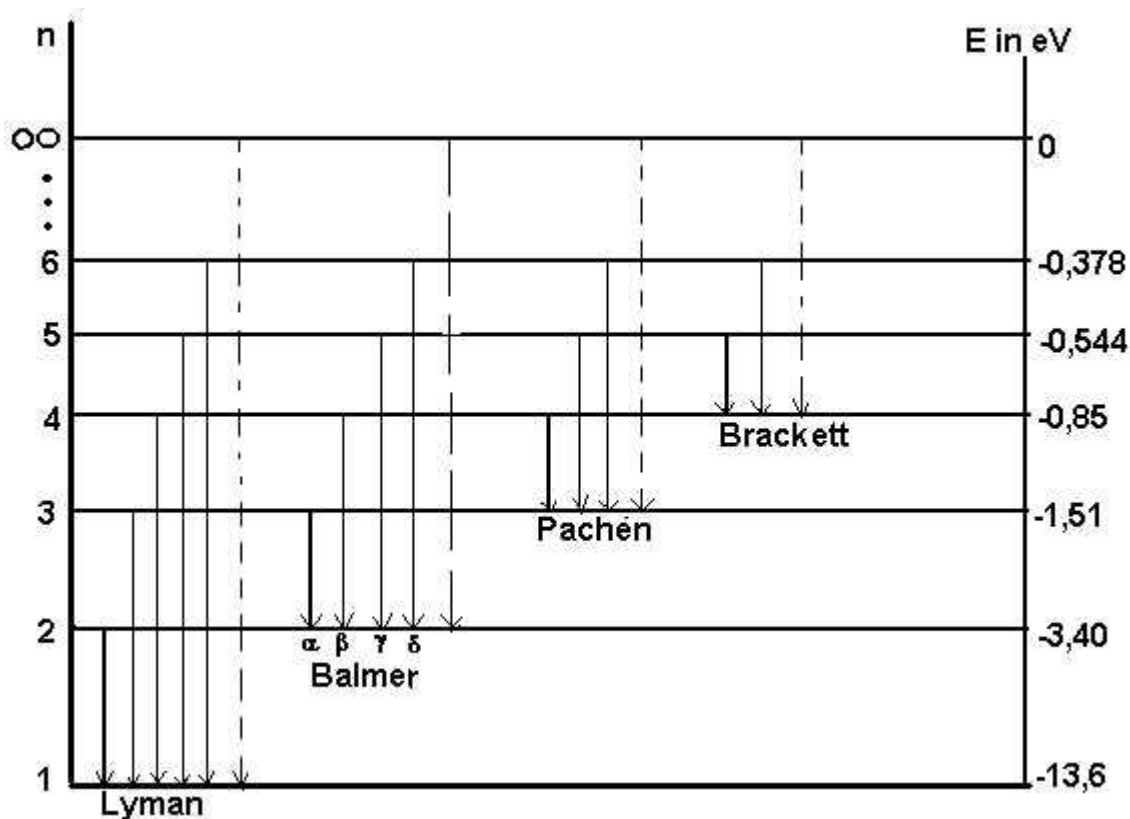
per $n \rightarrow \infty$ si ottiene la così detta testa di serie (massima frequenza) $\lambda = 910 \text{ Å}$.

N.B. $n \rightarrow \infty$ significa $E_n \rightarrow 0$, cioè l'atomo è al limite della ionizzazione.

La serie di Balmer, le cui prime quattro righe cadono nel visibile, si ottiene quando l'elettrone cade sul 2° livello dai livelli superiori. Tale serie comprende la riga rossa di risonanza $H\alpha$ la cui lunghezza d'onda è $\lambda = 6550 \text{ Å}$, la riga verde $H\beta$ di $\lambda = 4853 \text{ Å}$, la prima riga violetta $H\gamma$ di $\lambda = 4333 \text{ Å}$, la seconda riga violetta $H\delta$ di $\lambda = 4095 \text{ Å}$; le altre righe cadono nell'ultravioletto fino alla testa di serie avente $\lambda = 3640 \text{ Å}$.

L'idrogeno possiede altre serie spettrali, scoperte dopo che si raffinò la tecnica di rivelazione della radiazione infrarossa e delle microonde. La serie di Pachèn si ottiene quando l'elettrone cade sul 3° livello e così via, fino alle onde centimetriche.

Nel disegno è raffigurato lo schema delle righe di emissione dell'atomo di idrogeno



Domanda: in ciascuna serie la riga di risonanza è la più intensa: come mai?

Dal disegno si capisce che, se l'energia fornita all'elettrone è sufficiente a portarlo al limite di ionizzazione, questo ritorna allo stato fondamentale o per tappe successive o direttamente. Segue pertanto che su un gran numero di atomi la riga di risonanza si forma per la partecipazione di una percentuale elevata di atomi e perciò è la più intensa. Per un singolo atomo non si può parlare di percentuale, ma solo di probabilità di transizione; se, per esempio, l'elettrone si trova nel livello 3, esso può tornare al livello 1 con una probabilità $p(3,1)$ oppure con probabilità $p(3,2)$ al livello 2 e poi con probabilità $p(2,1)$ dal secondo al primo livello. Il calcolo di queste probabilità si può fare solo con la meccanica quantistica elaborata dal 1925 al 1930 da Heisenberg, Jordan, Born, Dirac, in base alla quale il calcolo delle probabilità entra nei fondamenti della fisica e non solo, come nella termodinamica statistica, per il calcolo di valori medi delle grandezze relative a una miriade di particelle governate peraltro da leggi deterministiche.

Il calcolo delle probabilità era già stato introdotto da Einstein nel 1917 nello studio dell'emissione di fotoni da un atomo eccitato, distinguendo due tipi di emissione: spontanea e stimolata. Il lavoro pionieristico di Einstein fu poi ripreso verso il 1950, quando i tempi erano tecnologicamente maturi, e portò all'invenzione del laser.

E' curioso il fatto che Einstein fu forse il primo a introdurre concetti probabilistici nei fondamenti della fisica, e poi invece si schierò decisamente contro la cosiddetta interpretazione di Copenaghen della meccanica quantistica portata avanti da Born e Bohr, in termini essenzialmente probabilistici, anche alla luce del principio di indeterminazione di Heisenberg, cui accenneremo più avanti.

Ricordo che la prima formulazione della meccanica quantistica fu opera di Heisenberg, che introdusse uno schema di matrici per determinare le probabilità di transizione da un livello energetico a un altro, per cui fu chiamata meccanica delle matrici. Subito dopo l'austriaco Ervin Schrodinger formulò la meccanica quantistica sviluppando l'idea di De Broglie di onda associata a una particella, per cui la meccanica quantistica acquistò una forma analoga a quella dell'ottica ondulatoria e fu detta meccanica ondulatoria. Ci si accorse però che la meccanica delle matrici e la meccanica ondulatoria erano due trascrizioni matematiche diverse della stessa teoria, che con Dirac assunse una forma quasi definitiva, mediante la teoria astratta degli operatori lineari e il principio di indeterminazione. In questa formulazione ad ogni grandezza fisica (osservabile) è associato un operatore lineare i cui autovettori (normalizzati) rappresentano i possibili stati fisici (autostati) e i valori che l'osservabile può assumere, ognuno con una opportuna probabilità, sono gli *autovalori* relativi agli autostati. In questa formulazione si possono affrontare in linea di principio tutti i problemi della fisica atomica e della chimica, per esempio il calcolo dei livelli energetici degli atomi a più elettroni, per il quale la teoria di Bohr e Sommerfeld era completamente inadeguata.

Spettri continui.

Se l'elettrone acquista un'energia maggiore o uguale a quella di ionizzazione, esso non è più vincolato al nucleo e la sua energia non è più soggetta a quantizzazione. Perciò al disopra dello spettro di righe si estende uno spettro continuo, anche nel caso dell'idrogeno. Siccome un metallo possiede elettroni liberi, esso emette uno spettro continuo quando è riscaldato; il suo spettro caratteristico di righe è emesso quando il metallo è vaporizzato, per esempio nel *cratere* dell'arco voltaico.

Spettri di emissione e spettri di assorbimento.

L'idrogeno assorbe essenzialmente nell'ultravioletto nell'atmosfera terrestre, essenzialmente nel visibile nell'atmosfera solare: come mai? Intanto diciamo che se un gas, per esempio l'idrogeno, che si trova nel primo livello, o stato fondamentale, è investito da un fascio di luce (monocromatica) i cui fotoni hanno energia insufficiente a portarlo in uno stato eccitato, la luce non viene assorbita, ma diffusa senza variazione di lunghezza d'onda (a meno che non si tratti di raggi X: vedi l'effetto Compton). Se invece ha energia sufficiente a portarlo, supponiamo, al terzo livello, la radiazione viene assorbita e l'atomo va nel terzo livello. Se poi il fascio è di luce bianca (spettro continuo emesso da un corpo condensato come la luce di una lampada a incandescenza o della fotosfera solare), vengono assorbite le lunghezze d'onda corrispondenti alla differenza di energia tra il livello d'arrivo e quello di partenza. Sulla Terra un gas (in particolare l'atmosfera) si trova a temperature dell'ordine di qualche centinaio di gradi Kelvin, che corrisponde a un'energia termica KT di circa 0,25 eV, perciò l'elettrone periferico dell'atomo è nello stato fondamentale (1° livello dell'atomo di idrogeno) e il gas assorbe righe della serie di Lyman. Sulla Terra l'idrogeno è (parzialmente) opaco nell'ultravioletto e trasparente nel visibile. Nell'atmosfera solare, alla temperatura di circa 6000 °K l'energia termica, per la legge di distribuzione statistica di Boltzmann, è sufficiente a portare una apprezzabile percentuale di atomi di idrogeno nel secondo livello, perciò la luce a spettro continuo emessa dalla fotosfera perde per assorbimento anche le righe della serie di Balmer e in particolare le quattro che cadono nel visibile. Perciò, osservando allo spettroscopio la luce solare, si vede lo spettro continuo di emissione solcato da righe nere di assorbimento e ciò permette l'analisi chimica degli elementi presenti nell'atmosfera solare mediante la spettroscopia. Tecniche di assorbimento si usano in laboratorio per l'analisi di sostanze non vaporizzabili, per esempio clorofilla o emoglobina, in soluzione acquosa, che si fa attraversare da luce a spettro continuo.

Cap. 5

Il principio di indeterminazione

La relazione di De Broglie $\lambda=h/p$ tra quantità di moto p di una particella (elettrone, fotone o altro), quantità eminentemente corpuscolare, e lunghezza d'onda associata, quantità eminentemente ondulatoria, conduce alle relazioni di indeterminazione scoperte da Heisenberg:

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geq h$$

e analoghe per le componenti y e z .⁴

Se infatti un elettrone (parlo di un elettrone, ma potrebbe essere un fotone, un neutrone o altra particella) ha quantità di moto ben determinata, per esempio p lungo l'asse x , ad esso è associata un'onda monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda=h/p$, che si estende lungo tutto l'asse x (una sinusoidale indefinita). In tal caso l'indeterminazione Δp sulla quantità di moto è zero, però l'indeterminazione Δx sulla posizione è infinita. Per avere una certa accuratezza nella posizione, un Δx finito, occorre che l'elettrone sia imprigionato su un segmento di lunghezza L (in una dimensione); ciò si può ottenere con due barriere di potenziale molto alte agli estremi di L (per un fotone, mediante due specchi). In tal caso $\Delta x=L$, ma ora non è possibile una quantità di moto, una lunghezza d'onda ben determinata: si richiede, a rigore, una infinità di onde che fuori di L si elidano per interferenza. Siano λ_1 e λ_2 due di esse. Dovrà risultare $L=n\lambda_2=(n+j)\lambda_1$, con j almeno uguale ad 1. Pertanto

$$\Delta p \geq h\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = h\frac{1}{L} \text{ e infine}$$

$$[1] \quad \Delta x \cdot \Delta p \geq h .$$

Da questa si ricava anche una indeterminazione sull'energia e sulla durata del processo necessario per misurare quell'energia. Infatti, in approssimazione non relativistica, $E = \frac{p^2}{2m}$, per cui

$$\Delta E = \frac{2p\Delta p}{2m} = v\Delta p, \quad (p/m = v) \text{ e quindi}$$

$$[2] \quad \Delta E \cdot \Delta t = \Delta p \cdot v\Delta t = \Delta p \cdot \Delta x \geq h .$$

La [2] ha, tra le altre, la seguente applicazione. Le righe spettrali non sono mai infinitamente sottili, perché la pressione del gas, anche se debolissima in un gas rarefatto, e l'effetto Doppler dovuto all'agitazione termica contribuiscono all'allargamento delle righe. Per diminuire, in laboratorio, non certo nelle atmosfere stellari, queste cause di allargamento che limitano la precisione nella misura delle lunghezze d'onda, occorre lavorare a pressioni e temperature estremamente basse, il che però rende molto deboli le righe da studiare. Resta tuttavia una larghezza ineliminabile, detta larghezza naturale, di origine quantistica. Infatti lo stato eccitato ha una vita media che in generale è molto piccola, dell'ordine di 10^{-9} s, che dà l'indeterminazione sull'istante del salto quantico; dalla [2] segue allora un'indeterminazione sul livello energetico dello stato eccitato

$$\Delta E \geq \frac{h}{\Delta t} \approx \frac{6,6 \cdot 10^{-34}}{10^{-9}} = 6,6 \cdot 10^{-25} \text{ J} \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ eV} .$$

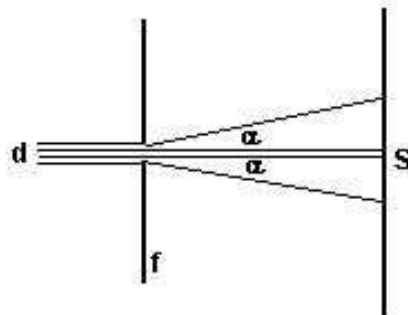
⁴ Jay Orear, "Fisica generale", Zanichelli, Bologna 1973

Verificare che per la riga rossa dell'idrogeno, $E=2 \text{ eV}$, $\lambda=6000 \text{ \AA}$ come ordine di grandezza, dall'indeterminazione di circa $4 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$ sull'energia segue un'indeterminazione di circa $1/100$ di \AA sulla lunghezza d'onda. Sfruttare il fatto che da $\lambda=hc/E$ segue, differenziando, $\Delta\lambda/\lambda = \Delta E/E$.

Uno sguardo più fisico al principio di Heisenberg.

La relazione di indeterminazione si può ottenere in tanti modo più diretti o, se volete, più fisici. Quello che descrivo, dovuto inizialmente a Bohr, è riportato in diversi testi.⁵

Si consideri un fascio monocromatico di particelle (elettroni, fotoni). Monocromatico vuol dire che tutte le particelle hanno la stessa quantità di moto p e quindi, per la relazione di De Broglie, la stessa lunghezza d'onda. Le particelle si muovano perpendicolarmente a un diaframma f sul quale è praticata una fenditura di larghezza d , attraverso la quale arrivano su uno schermo rivelatore S (vedi figura).



Per effetto della diffrazione il fascio parallelo subisce una dispersione angolare α tale che $\sin(\alpha)=\lambda/d$. Ma allora parallelamente allo schermo S le particelle avranno un quantità di moto che prima era zero e ora ha un valore indeterminato tra zero e p . $\sin(\alpha)=p\lambda/d$. D'altra parte, l'indeterminazione in direzione verticale (cioè parallela allo schermo) è d , per cui alla fine si avrà

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx d \cdot \frac{p\lambda}{d} = d \cdot \frac{h}{d} = h.$$

Particelle e onde attraverso due fenditure.

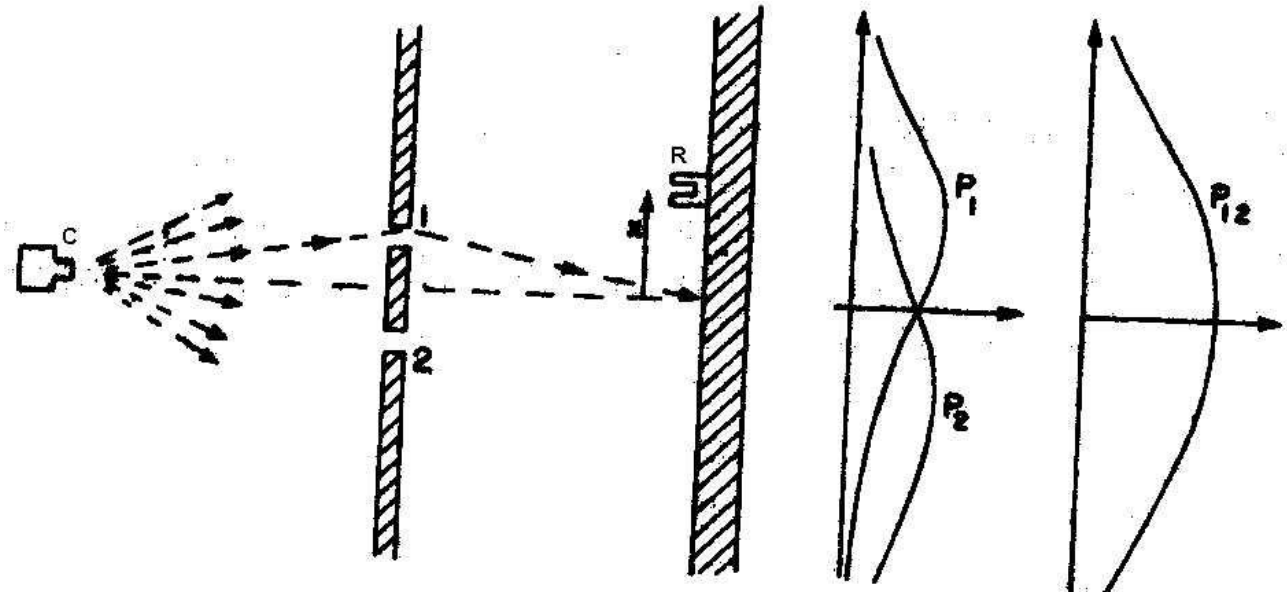
Secondo la meccanica quantistica, la materia usuale: elettroni, protoni, neutroni, e la luce: fotoni, si comportano essenzialmente allo stesso modo, fatta salva la differenza che i fotoni viaggiano sempre alla velocità limite c e perciò la loro dinamica è strettamente relativistica. Gli esperimenti che ora descriveremo e per i quali si rinvia alla bibliografia⁶ e ⁷ per una discussione più esauriente, conducono a un modello indiscutibilmente corpuscolare per tutte le particelle, siano esse elettroni o fotoni. Si tratta di corpuscoli classici, che però non obbediscono alle leggi classiche di Newton della meccanica. Per capire allora come vada inteso il comportamento ondulatorio, partiamo da un esperimento ideale nel quale un fascio di particelle macroscopiche, per esempio un fascio di proiettili, che quindi esibiscono un comportamento manifestamente classico, senza alcuna apparenza ondulatoria, è sparato contro un diaframma che arresta tutti i proiettili, salvo quelli che passano attraverso due fenditure 1 e 2 molto strette. (Vedi figura nella pagina successiva). Se è aperta solo la fenditura 1, i proiettili, sparati dal cannoncino C , colpiscono lo schermo sul quale scorre un rivelatore R , non solamente lungo la retta congiungente C con la fenditura 1, ma anche in punti diversi, perché, sfiorando i bordi della fenditura 1, possono essere deviati in modo imprevedibile. L'unica cosa che si può dire è che nella direzione $C - 1$ la probabilità è massima; in generale si ha una distribuzione di probabilità data dalla curva $P1$. Analogamente, se è aperta solo la fenditura 2, la distribuzione di

⁵ Werner Heisenberg, "I principi fisici della teoria dei quanti", Boringhieri, Torino 1963.

⁶ Piero Caldirola, "Dalla microfisica alla macrofisica", Mondadori, Milano 1974.

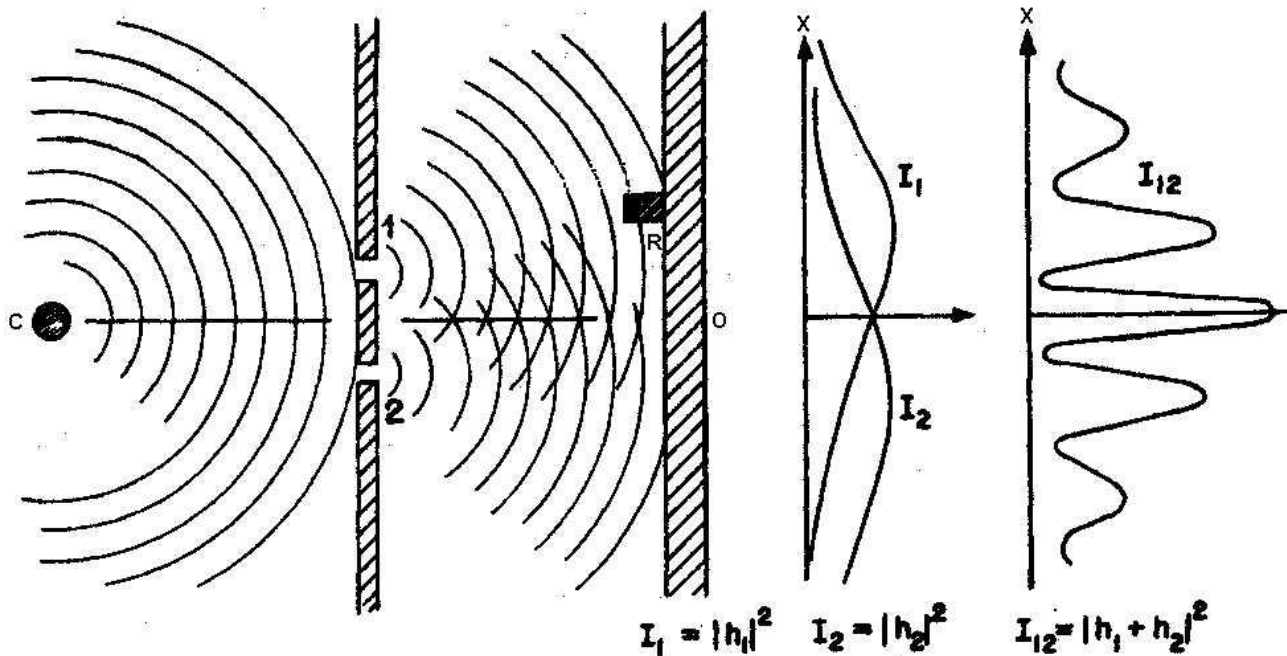
⁷ Richard Feynman, "La fisica di Feynman", volume 3°: meccanica quantistica, Zanichelli, Bologna 2001.

probabilità è data dalla curva P2. Se sono aperte entrambe le fenditure, un proiettile arriva in un punto dello schermo di ascissa x con la probabilità data dalla curva P12. Siccome un proiettile o passa attraverso la fenditura 1 o attraverso la fenditura 2, e questi due eventi sono incompatibili, $P_{12} = P_1 + P_2$. Ciò è d'accordo con l'intuizione (che cos'è l'intuizione?), e risulta anche dal confronto quantitativo delle tre curve di probabilità.



Interferenza di onde luminose (esperimento con fotoni).

Vediamo ora che succede se sostituiamo il cannoncino C con una sorgente luminosa. (L'esperimento si può realizzare anche con onde d'acqua).



Con la sola fenditura 1 aperta, l'intensità luminosa è data dalla curva I1, con la sola fenditura 2 aperta, l'intensità è I2. Si vede che le curve di intensità I1 e I2 rassomigliano alle curve di probabilità classiche P1 e P2 nell'esperimento con proiettili. Se h_1 e h_2 sono le ampiezze delle onde singole, le intensità sono uguali (proporzionali) ai quadrati delle norme delle ampiezze. Ma se sono aperte entrambe le fenditure, l'intensità I12 non è affatto uguale a $I_1 + I_2$. Nascono fenomeni di interferenza che non hanno l'uguale nella meccanica classica e risulta

$$I_{12} = |h_1 + h_2|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 + 2(h_1 \cdot h_2).$$

Si noti che h_1 e h_2 sono vettori, il cui angolo è lo sfasamento nel punto in cui le onde interferiscono.

Il prodotto scalare tra i vettori h_1 e h_2 , che produce interferenza, è $h_1 \cdot h_2 = |h_1| \cdot |h_2| \cdot \cos(\theta)$.

Se subito dopo il diaframma con le fenditure, sull'asse orizzontale dell'apparato sperimentale, si pone un dispositivo che permette di individuare la fenditura attraverso cui è passato il fotone, le frange di interferenza spariscono e la curva I_{12} diventa analoga alla curva P_{12} .

Ciò dipende dal fatto che, per sapere attraverso quale fenditura passa il fotone, dobbiamo in qualche modo interagire con esso; ciò produce una variazione imprevedibile dell'angolo di fase e il valore medio del suo coseno è zero: si distrugge l'interferenza.

La cosa interessante è che, se si diminuisce l'intensità luminosa fino a quando sullo schermo arriva un fotone per volta, il rivelatore reagisce come all'arrivo di una particella: un quanto di energia. Se il rivelatore è collegato a un amplificatore acustico, si sente un "clic" la cui intensità non dipende dall'intensità del fascio luminoso, ma solo dalla frequenza della luce adoperata. Un aumento dell'intensità luminosa ha il solo effetto di aumentare il numero di "clic" per unità di tempo.

Risultati analoghi si hanno con una sorgente di elettroni. Tuttavia, mentre con luce visibile la distanza tra le due fenditure può essere macroscopica, dell'ordine di un centesimo di millimetro, con un fascio di elettroni, anche molto lenti, l'interferenza richiede distanze di qualche Å°, e perciò può avvenire per riflessione su un reticolo cristallino, come si fa per i raggi X.

Possiamo pertanto concludere che in meccanica quantistica ad ogni particella è associata un funzione vettoriale $\Psi(x, y, z, t)$, funzione della posizione e del tempo, il cui modulo al quadrato dà la distribuzione di probabilità di trovare la particella nel punto spazio-temporale (x, y, z, t) . La funzione Ψ è matematicamente di tipo sinusoidale, per cui si chiama funzione d'onda. Per la sua interpretazione statistica, è detta ampiezza di probabilità. Se la funzione d'onda non dipende dal tempo, il processo associato alla particella è detto stazionario.

Caso di un elettrone vincolato su un segmento di lunghezza l .

In condizioni stazionarie la funzione d'onda dipende solo dalla posizione x con $0 \leq x \leq a$.

Dovendo essere $\Psi(0) = \Psi(l) = 0$, sarà $\Psi_n(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$, con $l = n\lambda/2$. Perciò la quantità di

moto è quantizzata: $p_n = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2l} n$ e la velocità sarà $V_n = \frac{h}{2lm} n$. Segue che anche nello stato $n=1$

di minima energia la particella non sarà ferma, ma avrà una velocità pari ad $h/(2lm)$. (Ciò per una particella non relativistica, per esempio un elettrone a bassa energia; un fotone invece, avendo sempre velocità c , va trattato con la meccanica relativistica).

L'energia risulterà $E_n = \frac{h^2 n^2}{8ml^2}$.

Quesito: come mai un sasso nello stato di minima energia è fermo?

Ritornando alla funzione d'onda la probabilità di trovare l'elettrone con ascissa compresa tra x e

$x+dx$ è $P(x) \cdot dx$, con $P(x) = A^2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$.

Siccome l'elettrone è vincolato a stare sul segmento di lunghezza l , la probabilità di trovarlo fuori del segmento è zero, mentre è 1 la probabilità di trovarlo sul segmento. Imponendo che

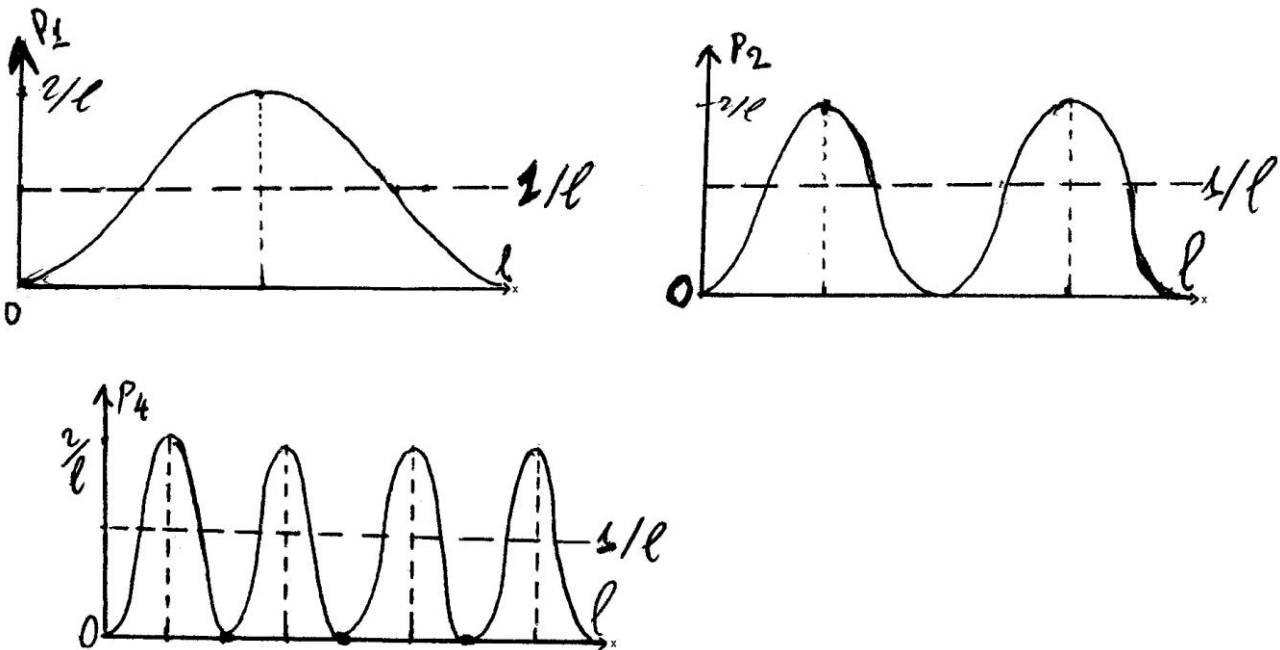
$$\int_0^l A^2 \sin^2\left(\frac{\pi n}{l} x\right) dx = 1,$$

si trova la condizione di *normalizzazione*

$$A^2 = \frac{2}{l}.$$

Nel livello $n=1$, la probabilità di trovare l'elettrone è massima al centro del segmento, per $n=2$ è massima a $1/4$ dagli estremi e così via. Da un punto di vista classico la distribuzione di probabilità è uniforme (è ugualmente probabile trovare la particella in qualsiasi punto tra 0 ed l); perciò la densità

di probabilità classica è $P_{class} = \frac{1}{l}$. La probabilità quantistica ammette la probabilità classica come valore medio, però, per piccoli numeri quantici n , lo scarto è molto forte. Per elevati numeri quantici invece la varianza è piccola e la probabilità quantistica fluttua oscillando in modo estremamente rapido intorno alla probabilità classica, come illustrano i disegni seguenti.



Dalla formula dell'energia si nota che, al crescere del numero quantico n , i livelli energetici sono sempre più distanziati, ma la variazione percentuale tende a zero come $1/n$. Ciò significa che per elevati valori dell'energia la discontinuità quantistica sfuma nella continuità classica.

I perché.

- 1) **Un corpo** che perde energia (per attrito, irraggiamento o altro) rallenta; perché un satellite artificiale che perde energia per attrito con gli alti strati dell'atmosfera accelera?

Naturalmente, perdendo energia, finisce per cadere sulla Terra.

Anche un insieme di elettroni accelerati irradia (e quindi perde) energia, per esempio in un'antenna radiotrasmittente; l'energia irradiata deve essere continuamente rifornita all'antenna dal generatore a radiofrequenza perché l'antenna continui a funzionare.

Perché invece un elettrone periferico di un atomo, pur muovendosi di moto accelerato secondo il modello di Bohr, non irradia finendo per cadere sul nucleo?

- 2) **Perché** un corpo più freddo non cede calore a un corpo più caldo? Il fatto violerebbe qualche principio fondamentale?

- 3) **Perché** una pentola piena d'acqua posta sul fuoco prima o poi bolle (mai che ghiacci)?
- 4) **Perché** un sasso abbandonato a se stesso cade verso il pavimento e mai verso il soffitto?
Sono così diversi i due casi, della pentola e del sasso?
- 5) **Perché** il cielo sereno è azzurro se l'aria è incolore? Perché "rosso di sera"?
(Lord Rayleigh determinò il numero di Avogadro misurando l'intensità dell'azzurro del cielo: poetico, no?).
- 6) **Perché** una gocciolina d'acqua è trasparente, come pure un microcristallo di borotalco? Perché viceversa le nuvole sono bianche? La schiuma del mare è bianca? Il borotalco è bianco?
N.B. I "perché" 5) e 6) richiedono conoscenze di ottica fisica. Se non sai rispondere, non preoccuparti.
- 7) **L'urto** tra due corpi macroscopici è sempre più o meno anelastico; perché l'urto tra due atomi è rigorosamente elastico a bassa energia e diventa anelastico ad alta energia? Quanto deve essere *grande* questa alta energia?
- 8) **Noi** possiamo percepire un oggetto con l'udito, se esso emette un suono, con la vista se emette Luce:
Perché lo localizziamo molto meglio con la vista che con l'udito?
- 9) **Perché** si parla comunemente di *onde* sonore e non di *raggi* sonori? Perché viceversa si parla di *raggi* luminosi e non di *onde* luminose? (Raggi X, raggi γ , però microonde, onde radio. Eppure si tratta in ogni caso di radiazione elettromagnetica: sapreste interpretare questa terminologia linguistica?).

Bibliografia di riferimento

(Anche per gli alunni)

- 1) Armando Manna: "Elementi di fisica atomica", R.A.D.A.R. Padova, 1972;
- 2) Jay Orear: "Fisica generale", Zanichelli, 1973;
Per approfondimenti:
- 3) AA.VV., "La fisica di Berkeley", Zanichelli, 1974;
(4° volume, fisica quantistica);
- 4) Richard Feynman: "La fisica di Feynman", Zanichelli, 2001;
(3° volume, meccanica quantistica);
- 5) Richard Feynman, "QED", (la strana teoria della luce e della materia), Adelphi, Milano 1989;
(E' un libro *divulgativo* ad alto livello sull'elettrodinamica quantistica: *QED*);
- 6) Enrico Beltrametti (a cura di): "Fenomeni quantistici", Le Scienze Quaderni, Febbraio 2000;
(per delucidazioni su aspetti concettuali e applicazioni speciali della fisica quantistica; non è di facile lettura);
- 7) Marco Cattaneo, " Heisenberg", I grandi della scienza, da Le Scienze, novembre 2000; (per conoscere la vita e l' opera di uno dei padri fondatori della fisica moderna);
- 8) Elena e Leonardo Castellani, "Feynman", I grandi della scienza, da Le Scienze, novembre 2003;
(per conoscere la vita e l'opera del creatore dell'elettrodinamica quantistica).