OTTAVIO SERRA
Numeri complessi e… dintorni

Nota storica.

I numeri complessi si incontrano per la prima volta nel tentativo di risolvere le equazioni algebriche. Se i coefficienti dell'equazione sono razionali o, più in generale, reali, l'equazione di primo grado non dà sorprese: la soluzione è nel campo di razionalità dei coefficienti, visto che si ottiene mediante una divisione. Un'equazione di secondo grado dà luogo a casi di impossibilità se il suo discriminante è negativo, nel qual caso essa non ammette soluzioni. Però non c'è nulla di scandaloso nel dire che un'equazione di secondo grado ha due soluzioni, una o nessuna, secondo che il discriminante è positivo, zero o negativo (si intende, soluzioni nel campo reale).
Lo sconcerto si prova con le equazioni di terzo grado, quando si presenta il cosiddetto caso *irriducibile*, cioè il caso in cui ci sono tre soluzioni reali e tuttavia nella formula risolutiva di Tartaglia c'è la radice quadrata di un discriminante negativo.
Ricordo che la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado, ridotta, come è sempre possibile, alla forma canonica $x^3+px+q=0$, è la seguente:

$$x=\sqrt[3]{-q/2+\sqrt{q^2/4+p^3/27}}+\sqrt[3]{-q/2-\sqrt{q^2/4+p^3/27}}\,.$$

Nel tentativo di calcolare le soluzioni, si fa gradualmente strada, con gli algebristi italiani del '500, il concetto dei numeri immaginari, detti anche *numeri ficti* (finti) o anche *surdi* (assurdi) o *quantità silvestri*, nomi che tradiscono lo stato di confusione e quasi di sgomento nella mente dei matematici che, attraverso numeri *impossibili*, arrivano a quantità reali. Con l'algebra di Raffaele Bombelli bolognese (1530-1572), abbiamo già un calcolo aritmetico sull'unità immaginaria $i=\sqrt{-1}$, con notazioni abbastanza vicine a quelle moderne, anche se non è ancora chiaro che cosa rappresenti il formalismo. Ancora Leibniz (1646-1716) chiama l'unità immaginaria *un anfibio tra l'essere e il nulla.*
Per molto tempo si lavorò formalmente sui cosiddetti numeri complessi a+ib, essendo a e b due numeri reali detti rispettivamente parte reale e parte immaginaria, come se fossero binomi di primo grado in i, con l'avvertenza di sostituire nei risultati finali -1 al posto di i^2. Se vogliamo, la situazione è alquanto paradossale: dopo aver detto che la radice quadrata dei numeri negativi non esiste, tuttavia la possiamo portare alla luce dell'esistenza con un colpo di bacchetta magica, battezzando $\sqrt{-1}=i$.
Occorre aspettare Gauss (1777-1855) perché, con l'interpretazione dei numeri complessi come punti del piano cartesiano o, se vogliamo, come vettori, essi acquistino pieno diritto di cittadinanza in matematica : la somma di due numeri complessi viene interpretata come una traslazione, il prodotto come una similitudine.
E' dunque la geometria che per prima legittima l'immaginario. In seguito l'introduzione dei numeri complessi sarà realizzata per via puramente aritmetica e infine con i metodi dell'algebra astratta.
Siccome però l'approccio aritmetico è più diretto, partirò da questo.

L'approccio aritmetico.

Si chiama insieme ***C*** dei numeri complessi l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali (a,b), se sull'insieme delle coppie si introducono le seguenti operazioni:

1) addizione (a,b)+(a',b') = (a+a', b+b'); è una definizione abbastanza naturale e prevedibile ;
2) moltiplicazione (a,b)*(a',b') = (aa'-bb', ab'+a'b); è una definizione strana e inattesa, ma col senno di poi…

L'addizione conferisce a ***C*** la struttura di gruppo abeliano, indotta tramite le componenti della coppia dall'analoga struttura dell'insieme ***R*** dei numeri reali. In particolare, lo zero è la coppia (0,0), l'opposto di (a,b) è (-a,-b).
Più laborioso, anche se elementare, è verificare le proprietà associativa e commutativa della moltiplicazione e la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione. Si verifica invece

facilmente che l'unità è la coppia (1,0). Con ciò ***C*** acquista la struttura di anello commutativo con unità.
Verifichiamo ora che ogni numero complesso (a,b) diverso da zero (0,0) ammette inverso (moltiplicativo). Si tratta di risolvere il sistema: (a,b)*(x,y) = (1,0), ovvero:
ax-by = 1, ay+bx = 0. Si trova $x = \frac{a}{a^2+b^2}, y = \frac{-b}{a^2+b^2}$.
C è perciò un campo (corpo commutativo) come ***R.***
Nella coppia (a,b) il primo termine, a, si chiama parte reale, il secondo termine, b, si chiama parte immaginaria del numero complesso (a,b).
In ***C*** c'è un sottocampo isomorfo ad ***R***: quello delle coppie con parte immaginaria zero (a,0). Infatti (a,0)+(a',0) = (a+a',0) e (a,0)*(a',0) = (aa',0). Perciò si dice che ***R*** è contenuto in ***C***: **per l'isomorfismo si identifica il numero complesso (a,0) col numero reale a.**
Consideriamo ora i numeri complessi con parte reale zero, gli *immaginari puri*: La loro somma è ancora un immaginario puro, (0,b)+(0,b') = (0,b+b'), ma il sottoinsieme non è chiuso rispetto alla moltiplicazione: (0,b)*(0,b') = (-bb',0), che è un numero reale.
In particolare, (0,1)*(0,1) = (-1,0) = -1. Esiste dunque un numero complesso il cui quadrato è -1. Se allora denotiamo con i il numero (0,1), risulterà $i^2 = -1$ ovvero $\sqrt{-1} = i$.
Siccome (a,b) si può scrivere (a,0)+(0,b) = a+(0,1)*(b,0) = a+ib, è giustificata la notazione *algebrica* dei numeri complessi: (a,b) = a+ib. Ciò è comodo anche mnemonicamente, perché permette di operare simbolicamente sui numeri complessi come se fossero binomi, salvo alla fine sostituire i^2 con -1, cosa che già sapevano fare gli algebristi italiani del '500.
In particolare l'inverso di z = a+ib è $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)*(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$.
a-ib viene detto il complesso coniugato di z = a+ib e indicato con $\bar{z}$.
Si noti che $z.\bar{z} = a^2+b^2$ è reale positivo (è 0, se z = 0) e la sua radice quadrata **positiva** è detta modulo di z. Il modulo di z, $|z|$, generalizza il concetto di valore assoluto di un numero reale: $|a| = \sqrt{a^2}$. Il numero complesso a+ib può essere rappresentato in forma polare o trigonometrica. Interpretando (a,b) come punto z del piano, $\rho = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ è la distanza del punto dall'origine ed è detto raggio vettore; detto θ l'argomento di (a,b), cioè l'angolo che Oz forma col semiasse positivo delle ascisse, si ha $a = \rho.Cos\theta, b = \rho.Sen\theta$ e quindi $z = \rho(Cos\theta + iSen\theta)$.
Si verifica facilmente che , se $z = \rho(Cos\theta + iSen\theta)$ e $z' = \rho'(Cos\theta' + iSen\theta')$, allora

$$z.z' = \rho.\rho'[Cos(\theta+\theta') + iSen(\theta+\theta')],$$

cioè il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. Ciò consente di ottenere facilmente l'ennesima potenza di z:

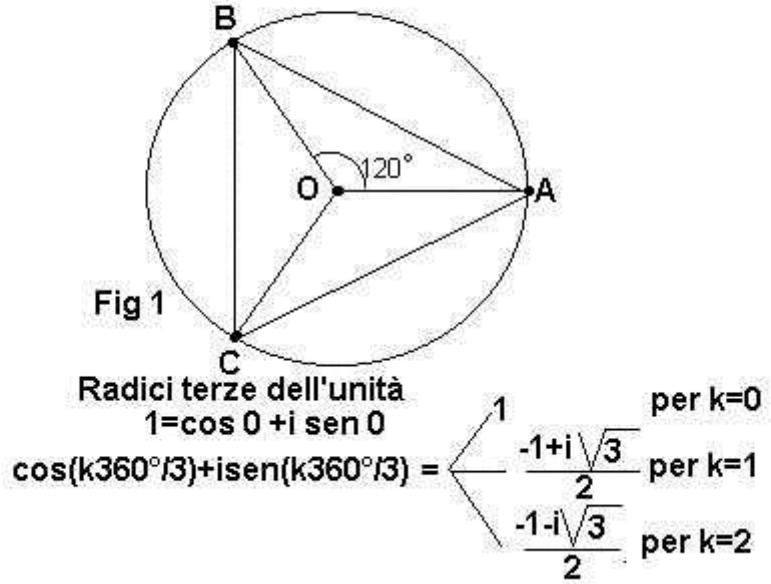
[1] $$z^n = \rho^n[Cos(n\theta) + iSen(n\theta)].$$

L'inversione della [1] rivela l'esistenza di n radici n-me di un numero complesso. Posto $\sqrt[n]{z} = w,$ $z = \rho(Cos\theta + iSen\theta)$, $w = r(Cos\phi + iSen\phi)$, si ricava

$\rho = r^n, \theta + 2k\pi = n\phi$, da cui si ricava

$r = \sqrt[n]{\rho}, \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$. Per k = 0,1,2,..n-1 si ottengono n distinti valori di ϕ e di conseguenza n radici n-me di z.

Si noti come nel campo complesso ***C*** le operazioni aritmetiche acquistino una simmetria ed un'eleganza che non si trova in ***R***. In particolare, mentre in ***R*** un numero x ha una sola radice n-ma se n è dispari e, se n è pari, due se x positivo, nessuna se x è negativo, in ***C*** ogni numero ha sempre n radici n-me. Esse nel piano cartesiano si dispongono ai vertici di un n-agono regolare inscritto in un cerchio di raggio pari alla radice n-ma (positiva) del suo modulo (il suo raggio vettore).
Nella Fig.1 sono rappresentate le tre radici terze dell'unità:

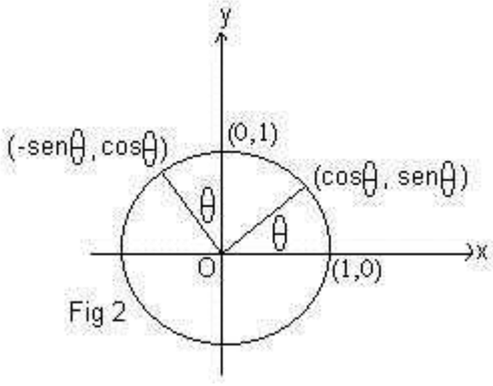


L'approccio geometrico.

La Fig 1 mostra che se ripetiamo tre volte la rotazione di 120°, il vettore OA torna su se stesso. Ciò suggerisce che le rotazioni si possono interpretare come numeri complessi di modulo 1 (le rotazioni sono isometrie). Infatti una rotazione di centro O si può rappresentare con una matrice unitaria 2x2 del tipo

$$\begin{bmatrix} Cos\theta, -Sen\theta \\ Sen\theta, Cos\theta \end{bmatrix} \qquad [2]$$

come suggerisce la Fig. 2



Perciò la rotazione suddetta può essere rappresentata dal punto, o vettore, $(\cos\theta, sen\theta)$ nel quale finisce il punto, o vettore, (1,0), primo vettore della base canonica del piano. Per l'identificazione già stabilita nell'approccio aritmetico tra punti del piano e numeri complessi, la rotazione suddetta è rappresentata dal numero complesso (di modulo 1) $\cos\theta + i.sen\theta$. Si noti come il prodotto (funzionale) di rotazioni corrisponde al prodotto di numeri complessi (somma degli argomenti).

Se accanto alle rotazioni consideriamo le omotetie di centro O e rapporto k, che sono rappresentate da matrici scalari, cioè con k sulla diagonale e zero altrove e ricordiamo che il prodotto (funzionale) tra una omotetia e una rotazione è una similitudine diretta (di centro O), otteniamo i numeri complessi di modulo arbitrario pari al valore assoluto di k: un numero complesso come prodotto di un numero reale e un numero complesso di modulo 1. Siccome il modulo deve essere non negativo, nel caso che k sia negativo si pone $\rho = -k$ e si sostituisce l'argomento θ con $\theta + \pi$.

L'isomorfismo tra il gruppo moltiplicativo dei numeri complessi non nulli e il gruppo delle similitudini dirette di centro O ci fa capire che entrambi i gruppi sono abeliani, come del resto è facile stabilire direttamente.

Che succede se accanto alle rotazioni consideriamo anche le isometrie indirette del piano, cioè le simmetrie assiali?

In generale, una simmetria assiale (ortogonale) rispetto ad un asse passante per O è rappresentata da una matrice del tipo

$$\begin{bmatrix} Cos\theta, Sen\theta \\ Sen\theta, -Cos\theta \end{bmatrix} \tag{3}$$

che è unitaria, come una matrice di rotazione, e perciò rappresenta una isometria, ma, avendo determinante uguale a -1, è un'isometria indiretta (scambia la destra con la sinistra).

Una matrice come la [3] ha i due autovalori 1 e -1: l'autospazio relativo all'autovalore 1 è l'asse di simmetria (ogni suo vettore è fisso rispetto alla [3]). La sua equazione si ottiene risolvendo il sistema indeterminato

$$\begin{bmatrix} Cos\theta, Sen\theta \\ Sen\theta, -Cos\theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

e si ottiene

$y = \dfrac{1 - \cos\theta}{sen\theta} x$ ovvero $y = \tan(\theta / 2).x$: l'asse di simmetria forma con il semiasse positivo delle ascisse un angolo $\theta / 2$.

Si noti che ogni simmetria assiale come la [3] si può ottenere componendo una rotazione [2] di un angolo θ con la simmetria assiale rispetto all'asse delle ascisse:

$$\begin{bmatrix} Cos\theta, Sen\theta \\ Sen\theta, -Cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\theta, -Sen\theta \\ Sen\theta, Cos\theta \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1, 0 \\ 0, -1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

dove, ovviamente, il prodotto di matrici va fatto righe per colonne.

La simmetria assiale rispetto all'asse x manda il punto (x,y) nel punto (x,-y) e perciò trasforma il numero complesso z = x + iy nel suo coniugato $\overline{z} = x - iy.$ (trasformazione di coniugio).

Infine, moltiplicando (componendo) simmetrie assiali con omotetie, abbiamo similitudini indirette. L'insieme delle similitudini dirette e indirette è il gruppo delle similitudini. Questo non è più abeliano, perché moltiplicando, per esempio, la rotazione e la simmetria rispetto all'asse x della [4] in ordine inverso si ottiene una simmetria assiale diversa:

$$\begin{bmatrix} 1, 0 \\ 0, -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Cos\theta, -Sen\theta \\ Sen\theta, Cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cos\theta, -Sen\theta \\ -Sen\theta, -Cos\theta \end{bmatrix}$$

che è la simmetria avente per asse $y = \tan(-\theta/2).x$.

L'approccio algebrico.

L'approccio algebrico consiste nella costruzione di un ampliamento algebrico semplice simbolico di ***R***, cioè nella costruzione di un campo contenente un sottocampo isomorfo ad ***R*** e nel quale un polinomio in una indeterminata x, a coefficienti in ***R,*** sia irriducibile in ***R***, mentre ammette almeno una radice nell'ampliamento da costruire. Indichiamo con ***R***[x] l'anello dei polinomi a coefficienti in ***R***. Il polinomio x^2+1 è irriducibile in ***R***; tutti i polinomi di ***R***[x] divisibili per x^2+1, cioè i suoi multipli, costituiscono un ideale di ***R***[x]. Due polinomi di ***R***[x] sono equivalenti, o, come si dice , stanno nello stesso laterale dell'anello modulo l'ideale (x^2+1), se la loro differenza è divisibile per x^2+1. L'anello quoziente ***R***[x]/(x^2+1) è perciò costituito da tutti i polinomi di primo grado delle forma a.x + b, essendo a, b $\in$***R***. In particolare, elementi distinti di ***R*** stanno in laterali diversi e costituiscono un sub-anello di ***R***[x]/(x^2+1) isomorfo ad ***R***. In questo senso si dice che l'anello quoziente ***R***[x]/(x^2+1) è un ampliamento di ***R***. In più, l'anello quoziente, contenendo un campo, è a sua volta un campo. Indichiamo con i = [x] il laterale costituito da tutti i polinomi che, divisi per x^2+1, danno resto x. Allora il laterale contenente x^2+1 sarà $[x]^2+1=i^2+1$, e siccome x^2+1 è equivalente a 0, segue che [x^2+1] = $[x]^2+1$ = $i^2+1=0$.

In generale, la classe laterale [a +bx] =[a]+[b].[x] = a + ib.

Siamo così arrivati al campo complesso come ampliamento algebrico del campo reale.

Questa trattazione segue quella di P. Dubreil citato in nota.[1]

Per altri punti di vista e approfondimenti, vedi Lombardo Radice [2], Zappa e Permutti[3].

Chiusura algebrica.

Un campo si dice algebricamente chiuso, se ogni equazione algebrica a coefficienti nel campo ammette almeno una soluzione. Abbiamo visto che ***R*** non è algebricamente chiuso. Invece ***C*** lo è. Il fondamentale teorema che ogni equazione algebrica in ***C*** ammette almeno una soluzione e di conseguenza tante quant'è il suo grado, fu dimostrato per la prima volta da D'Alembert, anche se in modo non perfetto, e poi da Gauss e Cauchy. Ne abbiamo visto un caso particolare nella determinazione delle n radici n-me di un numero complesso, problema equivalente a trovare le soluzioni dell'equazione $z^n-c=0$.

Una dimostrazione di questo teorema, secondo il metodo di Cauchy, si trova, per esempio, in Chiellini e Giannarelli[4]. Una dimostrazione molto bella e concisa, che richiede però conoscenze sulle funzioni olomorfe ed è basata su un teorema di Liouville, è riportata in Ghizzetti[5].

La bellezza della dimostrazione mi tenta di riportarla a grandi linee.

Ricordo che una funzione di variabile complessa continua in un aperto connesso A del piano complesso è una funzione f(z) derivabile in ogni punto di A, con derivata continua. Pensata la f(z)=f(x+iy) come funzione (complessa) delle due variabili reali (x,y), condizione necessaria e sufficiente di olomorfia è che risulti $f'_x=\frac{1}{i}f'_y$ (condizione di olomorfia). La derivata f'_z è a sua volta olomorfa.

Ciò premesso, sia f(z) una funzione olomorfa in tutto il piano complesso. Essa è allora sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale arbitrario c:

$$f(z)=a_0+a_1(z-c)+a_2(z-c)^2+...$$

Tale sviluppo è valido in tutto il piano e perciò anche all'esterno di un qualunque cerchio, cioè in un intorno di z = ∞. Lo studio di f(z) all'infinito si riconduce allo studio di f nel punto 0 mediante la sostituzione $w = \frac{1}{z-c}$ e si ottiene $f(w) = a_0 + a_1 \frac{1}{w} + a_2 \frac{1}{w^2} + ...$

Ed ecco il teorema di Liouville: "Se f(z) è olomorfa in tutto il piano, compreso il punto z = ∞, allora f(z) è costante".

Infatti z = ∞ equivale a w = 0 e pertanto, se qualcuno dei coefficienti con indice >0 fosse diverso da zero, in w = 0, cioè in z = ∞, si avrebbe una singolarità, polare o essenziale secondo che il numero di quei coefficienti è finito o infinito. Segue che f(w), ed anche f(z) si riduce al solo termine costante a_0.

Ora si può dimostrare facilmente il teorema fondamentale dell'algebra.

Sia P(z) un polinomio di grado n>0. P(z) ha all'infinito un polo di ordine n. Se P(z) non si annullasse per nessun valore finito di z, la funzione 1/P(z) sarebbe olomorfa in tutto il piano compreso il punto all'infinito e, per il teorema di Liouville, sarebbe costante; allora anche P(z) sarebbe costante, cioè di grado zero, contro l'ipotesi. Dunque P(z) ha almeno uno zero.

Segue immediatamente il corollario che un polinomio di grado n ha esattamente n zeri, contandoli con le dovute molteplicità.

Osservazione.

A scanso di equivoci, va detto che un'equazione non algebrica può non avere soluzioni. Basti pensare all'equazione

$$e^z = 0.$$

Infatti vale la formula di Eulero:

$$e^z = e^x(\cos y + iseny),$$ avendo posto z = x + iy.

L'equazione equivale pertanto al sistema: $e^x \cos y = 0,\ \ e^x seny = 0$, che è incompatibile perché coseno e seno non sono simultaneamente nulli.

Una dimostrazione elementare della formula di Eulero si può trovare in Ghizzetti [6]

Nota.

Questo articolo non avrebbe visto la luce senza le sollecitazioni dell'amico Franco Violentano.

---

[1] P. Dubreil, "Anelli, congruenze, ideali" in Strutture algebriche e strutture topologiche di H. Cartan, G. Choquet, J. Diximier, P. Dubreil a Altri, Institut de Mathematiques dell'Università di Ginevra, Association des Professeurs de mathematiques de l'enseignement public di Parigi, Feltrinelli 1963.

[2] L. Lombardo Radice, "Istituzioni di algebra astratta", Feltrinelli 1965.

[3] G. Zappa e R. Permutti, "Gruppi, corpi, equazioni, Feltrinelli 1963.

[4] A Chiellini e R. Giannarelli, "L'esame orale di matematica nei concorsi a cattedra", Libreria Veschi, Roma 1955.

[5] A. Ghizzetti, "Lezioni di teoria delle funzioni", Libreria Veschi, Roma 1953.

[6] A. Ghizzetti, "Lezioni di Analisi Matematica Vol. 1°, Libreria Veschi, Roma 1972.