Ottavio Serra

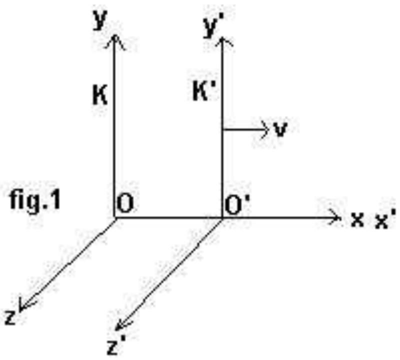
Teoria della Relatività

Nell'anno scolastico 2003/2004 tenni presso Il Liceo Scientifico Scorza un corso di approfondimento in fisica sulla teoria della relatività e sulla teoria dei quanti. In un articolo pubblicato su "Il Foglio", periodico del Liceo Ginnasio "G. Garibaldi" e Istituto d'Arte "A. Alfano" di Castrovillari, anno 10, N. 1/2 - maggio 2004, ho esposto i motivi per cui la Relatività, più della teoria dei Quanti, è sacrificata nell'insegnamento liceale e consigliato un possibile percorso *liceale* per recuperare, sul piano culturale, sia la relatività ristretta, sia i fondamenti concettuali della relatività generale.
Il presente articolo riproduce abbastanza fedelmente le lezioni tenute sulla teoria della relatività.
L'occasione è particolarmente felice, perché il 2005 è stato proclamato anno internazionale della fisica, proprio in coincidenza col centenario della Relatività ristretta.

Cap 1 Cinematica

Relatività galileiana.

Siano K e K' due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo traslatorio uniforme con velocità v, per esempio, in prima approssimazione , la crosta terrestre e un treno in corsa. Orientiamo gli assi di K' in modo che l'asse x' di K' scorra lungo l'asse x di K parallelamente a v, y' e z' siano paralleli a y e a z.



Risulta, posto il tempo t=0 quando O' transita per O, $x' = x - OO' = x - vt$,
mentre y' = y e z' = z.
Si ottiene la trasformazione di Galileo

[1] **TG**: $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$

Si noti che è sottintesa una quarta equazione. **t' = t** (il tempo, per Galilei e Newton, è assoluto, t'=t neanche si sognano di doverla scrivere).
Il principio di relatività consente di ricavare le grandezze non accentate (le coordinate in K) da quelle in K' semplicemente scambiando le lettere accentate con le non accentate e v con -v, come del resto è immediato algebricamente.

Dalle [1] segue che, detta **u**=(u_x, u_y, u_z) la velocità di una particella in K, **u'**=(u'_x, u'_y, u'_z) in K', risulta

[2] $u'_x = u_x - v, u'_y = u_y, u'_z = u_z$,

che è la ben nota regola di addizione delle velocità.
Passando alle accelerazioni, essendo v costante, risulta **a' = a**, l'accelerazione è indipendente dal moto del riferimento. Segue che anche la forza agente su una particella è invariante:

F = m**a** = m**a' = F'.**

Si conclude che la meccanica di Newton è invariante per trasformazioni galileiane.

Esercizio. Un motoscafo ha velocità c in acqua ferma; esso si muove su un fiume la cui corrente rispetto alle sponde è v. Detta L la larghezza del fiume, calcolare il tempo t1 di andata e ritorno per attraversare il fiume perpendicolarmente alle sponde e il tempo t2 di andata e ritorno per percorrere un tratto L parallelamente alla corrente. Si trova

$$t_1 = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, t_2 = \frac{t_0}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

essendo $t_0 = \frac{2L}{c}$ il tempo impiegato dal motoscafo in acqua ferma.

Se però invece del motoscafo consideriamo un raggio di luce emesso da una sorgente che si muove con velocità v rispetto alla Terra, si trova che i tempi impiegati per percorrere un tratto L parallelamente o perpendicolarmente alla velocità v sono uguali; la velocità della luce non si somma con la velocità della sorgente o del riferimento. Dagli esperimenti di Michelson e Morley[1] e dalle osservazioni astronomiche di De Sitter, risulta che la velocità della luce è un assoluto, è indipendente dal riferimento, come del resto si deduce dalle equazioni elettrodinamiche di Maxwell. Il contrasto con la [2] dice che la TG, la trasformazione di Galileo, cade in difetto alle alte velocità, e quindi è da correggere anche la meccanica di Newton, che è consistente con la TG.

Velocità limite.

La meccanica di Newton non pone un tetto alle velocità in natura e da ciò segue che si possa parlare di un tempo assoluto, cioè che scorra ugualmente in tutti i riferimenti e per tutti gli osservatori. In particolare, è assoluta la simultaneità, anche di eventi spazialmente lontani.
Ma una velocità infinita è chiaramente fantastica; è più ragionevole ipotizzare l'esistenza di una velocità massima (finita) per gli agenti fisici, diciamo c tale velocità. Ma allora la TG cade in difetto, perché se ho velocità c in K', in K avrò c+v, maggiore di c. Dunque, se esiste una velocità massima finita c, questa **non si somma** con la velocità della sorgente o del riferimento. D'altra parte, per una nota proprietà matematica, il massimo, se esiste, è unico. E siccome gli esperimenti di Michelson e Morley e le osservazioni astronomiche di De Sitter e altri ci dicono che la velocità delle onde elettromagnetiche (della luce) non si somma con la velocità del riferimento o della sorgente, la velocità massima e limite va identificata con la velocità della luce.
Segue che la composizione delle velocità non può essere quella derivata dalla TG.
Un'altra conseguenza apparentemente paradossale è la non assolutezza della simultaneità di due eventi.
Per poter quantificare queste affermazioni dobbiamo capire come cambia lo scorrere del tempo in riferimenti in moto reciproco traslatorio rettilineo uniforme.
I due principi sui quali Einstein basa la teoria della relatività ristretta sono:
1) Due sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti per la descrizione dei fenomeni fisici.
(Le leggi fisiche devono avere la stessa forma, devono essere invarianti, in tutti i sistemi di riferimenti inerziali).
2) Esiste una velocità limite che è la stessa in ogni sistema di riferimento inerziale e questa è la velocità della luce (nel vuoto).
In verità sono presenti altri postulati impliciti: lo spazio è tridimensionale ed euclideo e: se K' si muove rispetto a K con velocità **v**, K si muove rispetto a K' con velocità **-v**, e ancora: se un'asta è lunga un metro quando è ferma in K, portata a riposo in K' è ancora lunga un metro.

[1] Resnick, "Introduzione alla relatività ristretta", Casa Editrice Ambrosiana, Milano 1969

Vediamo ora come si misura un intervallo di tempo in un riferimento K' e in un riferimento K rispetto al quale K' si muova con velocità vettoriale costante **v** (vedi fig. 1)
Premetto che le misure di lunghezza non sono alterate in direzione perpendicolare a **v**. Infatti, se un'asta lunga un metro lungo l'asse y' lasciasse su y un segno più corto di un metro, la stessa asta ferma in K dovrebbe lasciare su y' un segno più lungo e insieme, **per il principio di relatività**, più corto e questa è una contraddizione.
Considero ora in K' un tratto lungo h parallelo all'asse y'. La luce, per percorrerlo in andata e ritorno impiega un tempo Δt' = 2h/c. In K, affinché il raggio di luce parta dalla sorgente, si rifletta a quota h su uno specchio e ritorni alla sorgente, impiegherà un intervallo di tempo Δt. Siccome K' si muove rispetto a K con velocità v (vedi fig. 1), mentre il raggio di luce sale e poi scende, K' avanza lungo l'asse x di un tratto v.Δt, e perciò $\Delta t = \dfrac{AB + BA'}{c} = \dfrac{2AB}{c} = \dfrac{2}{c}\sqrt{h^2 + (\dfrac{v.\Delta t}{2})^2} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$.

(vedi fig. 2).

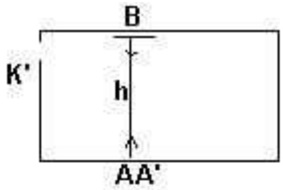
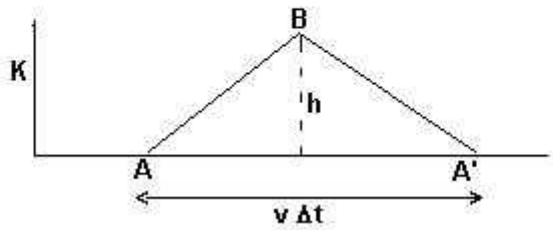


fig. 2



Δt' viene detto tempo proprio, perché gli eventi iniziale e finale (partenza e ritorno del segnale) avvengono nello stesso luogo. Si noti che il tempo proprio Δt' è minore della durata dello stesso processo osservato da un riferimento in cui gli eventi iniziale e finale del processo accadono in luoghi aventi ascissa diversa.

La trasformazione di Lorenz TL.

Troviamo ora la trasformazione compatibile con i principi della relatività che dovrà sostituire quella di Galileo.
Assumendo che in K' e K si abbia t' = t = 0 quando le origini delle coordinate coincidono, la trasformazione deve essere omogenea. Inoltre deve essere lineare per il principio di relatività: un moto rettilineo uniforme in K deve essere rettilineo e uniforme in K'. Perciò
[3] x' = a(1,1)x+a(1,2)y+a(1,3)z+a(1,4)t
y' = a(2,1)x+a(2,2)y+a(2,3)z+a(2,4)t
z' = a(3,1)x+a(3,2)y+a(3,3)z+a(3,4)t
t' = a(4,1)x+a(4,2)y+a(4,3)z+a(4,4)t
Siccome abbiamo scelto il piano x'z' coincidente con il piano xz, sarà y' = 0 se e solo se y = 0, perciò la seconda equazione delle [3] si riduce a y' = a(2,2)y e analogamente z' = a(3,3)z.
Siccome d'altronde y e z sono fisicamente equivalenti, a(2,2) = a(3,3) = b(v).

Per il principio di relatività y = b(-v)y' e y = $\frac{1}{b(v)}y'$, pertanto b(v).b(-v) = 1.

Se poi inverto il verso dell'asse x (e dell'asse x') v si muta in -v, ma fisicamente non cambia niente, perciò b(-v)= b(v) = b. Segue b^2= 1 e perciò b=1.(b = -1 è da scartare, perché abbiamo orientato y e y' concordi).
Dunque, **y' = y e z' = z (come nella TG).**
Restano la prima e la quarta equazione delle [3].
Dalla fig. 1 si vede che x' = 0 se e solo se x-vt = 0, perciò **x' = l(v).(x-vt).**
Per il principio di relatività, x = l(-v).(x'+vt') e risolvendo rispetto a t' ho: **t' = l(v)t+m(v)x.**
Per la invarianza della velocità della luce, $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \gamma(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2)$ e siccome y' = y (e z' = z), sarà γ=1. Pertanto resta $x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2$.

Sostituendo le espressioni trovate per x' e t' si ha infine $l = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ ed $m = \frac{-v/c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

La trasformazione, detta di Lorenz in onore del fisico olandese, è pertanto

[4] TL $$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

N.B. Scambiando v con -v e le lettere accentate con le non accentate, si ottiene la **TL inversa**. Naturalmente, tale inversa si può ottenere anche risolvendo rispetto a x,y,z,t il sistema **[4].**

Composizione delle velocità.

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}$$ e analogamente

$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x} \quad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2}u'_x}$$

Si noti che, se $u'_x = c,$ allora anche $u_x = c.$

Si noti ancora che dalla TL segue che $\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2\Delta t^2$ è un invariante relativistico.

Esercizio:
Ricavare dalla TL e dalla sua inversa la cosiddetta *dilatazione del tempo* (già trovata precedentemente con considerazioni più fisiche) e la cosiddetta *contrazione della lunghezza.*
Consideriamo i seguenti esempi:

a) Due eventi che accadono nello stesso posto di un riferimento K' in istanti diversi, accadono in posti diversi nel riferimento K. Se, per esempio, K' è un treno in corsa e gli eventi sono l'inizio e la fine di una telefonata di un passeggero, i due eventi accadono nello stesso posto del treno, ma in posti diversi della crosta terrestre (di K). **Di ciò nessuno si meraviglia, perché esperienza quotidiana.**

b) Due eventi che accadono nello stesso istante in posti diversi di K', non sono più simultanei in K. I due eventi potrebbero essere l'accensione simultanea di due lampadine agli estremi del corridoio di una carrozza di un treno in corsa. Il passeggero posto a metà del corridoio vede le due lampadine accendersi nello stesso istante e conclude correttamente per la simultaneità dei due eventi. Un cantoniere posto sulla massicciata in corrispondenza del passeggero quando questi vede i due lampi di luce, riceve prima il lampo della lampadina posta in coda al corridoio (perché questa gli si avvicina) e poi quello della lampadina di testa. Egli conclude correttamente che i due eventi non sono simultanei. Questa affermazione ci lascia stupefatti. Lo stupore di questa conclusione è dovuto al fatto che noi ci scambiamo informazioni mandandoci segnali e i segnali più veloci che abbiamo a disposizione sono segnali luminosi, in generale segnali elettromagnetici. La luce è così rapida nell'esperienza fisica macroscopica che noi consideriamo infinita la sua velocità, il ritardo si nota solo su distanze astronomicamente grandi o nel caso di particelle sub atomiche la cui velocità sia comparabile con quella della luce. Ben diverso è il caso del suono (in aria); quando vediamo il fulmine, ci aspettiamo un ritardo per il tuono. Se guardiamo l'orologio di un campanile lontano e leggiamo l'ora, noi regoliamo il nostro orologio fermo su quell'ora, ma se l'informazione sull'ora ci è comunicata da una staffetta, noi correggiamo l'informazione col ritardo che presumibilmente ha accumulato la staffetta per raggiungerci.

Quantifichiamo ora gli esempi precedenti a) e b).

a) Se la telefonata è durata 5 minuti e il treno va a 20 metri al secondo, mentre per il passeggero l'inizio e la fine della telefonata sono avvenuti nello stesso posto, rispetto al riferimento terrestre sono avvenuti a 6 chilometri di distanza. Ho usato calcoli non relativistici, perché una velocità di 20 m/s è molto piccola (rispetto a c).

b) Se la velocità del treno è sempre di 20 metri al secondo e la carrozza è lunga 40 metri, i due eventi, simultanei nel treno, non lo sono più nel riferimento terrestre. Ma la differenza di tempo è estremamente piccola. Si ha infatti:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0+\frac{20}{9.10^{16}}40}{\sqrt{1-\frac{400}{9.10^{16}}}} \cong \frac{8}{9}.10^{-14} \text{ secondi.}$$

all'incirca un centomillesimo di nano-secondo.

Ben diversamente vanno le cose per particelle sub atomiche che viaggiano a velocità prossime a quella della luce.

Per esempio, un pione è instabile e decade (se negativo, in un muone negativo e un antineutrino muonico) con una vita media $\tau = 1{,}8.10^{-8}$ secondi quando è allo stato di quiete. Se un fascio di pioni viaggia alla velocità v = 0,99c, esso percorre circa 38 metri prima che l'intensità del fascio si dimezzi, mentre classicamente dovrebbe percorrere solo un tratto vτ =5,35 metri. Questa discrepanza apparente si spiega col fatto che τ è la vita media propria, cioè la vita media in un riferimento in cui il pione è in quiete (**circa in quiete**: state fermi, se potete).

Nel laboratorio la vita media è $t = \tau / \sqrt{1-0{,}99^2} = 12{,}76.10^{-8}$ s e perciò lo spazio percorso nel laboratorio è 12,76. 2,97 = 38 metri circa, in buon accordo con la distanza misurata.

Si osservi che nel riferimento del pione, i 38 metri del laboratorio misurano 38.0,141=5,358 metri e dividendo per v si ritrova con buona precisione la vita media di quiete.[2]

Per ulteriori studi di cinematica relativistica, in particolare per l'aberrazione astronomica e gli effetti Doppler longitudinale e trasversale, vedi il testo citato in nota 2. E' notevole che, mentre l'aberrazione astronomica e l'effetto Doppler longitudinale erano noti e giustificati approssimativamente in cinematica classica, l'effetto Doppler trasversale era sfuggito all'indagine sperimentale perché troppo piccolo e fu osservato la prima volta da Ives e Stilwell nel 1938. Il risultato è $f = f'\sqrt{1-v^2/c^2}$ ed è una conseguenza diretta della dilatazione del tempo.

Cap 2 Dinamica

Per brevità ci limiteremo allo studio dell'impulso (quantità di moto) e dell'energia.

Come in meccanica classica, ipotizziamo la legge di conservazione della quantità di moto. Questa legge in meccanica classica è equivalente al principio di azione e reazione, che ora non è sostenibile, in quanto implica che la forza agisca istantaneamente a distanza. Invece la conservazione della quantità di moto, per un sistema isolato, discende da un principio generale di simmetria, l'omogeneità dello spazio, che dovrebbe valere anche in meccanica relativistica. Esso afferma in sostanza che in un riferimento inerziale tutti i punti dello spazio sono equivalenti per la descrizione dei fenomeni fisici. Noi lo ammetteremo senza dimostrazione, perché questa non è semplice.

Si trova allora che la quantità di moto non è più p = m.v, bensì

$$p = \gamma m v, dove \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Posto γm=M(v), possiamo scrivere p=M(v)v o, brevemente, p=Mv.

Per una dimostrazione si veda [3].

E' interessante notare che, mentre nella meccanica di Newton $p = m\frac{dx}{dt}$, ora $p = m\frac{dx}{d\tau}$, essendo τ il tempo proprio. In generale **p** è un vettore e x va sostituito col vettore **r** =(x,y,z).

La grandezza M(v), dipendendo dalla velocità, una volta si chiamava massa relativistica o massa di moto, in contrapposizione ad m, massa a riposo o massa di quiete, ma è meglio non usare questa terminologia, per evitare equivoci. Si veda Elio Fabbri in nota 1. Per noi la massa è sempre e solo m, la massa di Newton.

Per l'energia cinetica si trova il seguente risultato: $T = m.c^2(\gamma - 1)$.

Per chi conosce il calcolo integrale, la formula si dimostra come segue.

Per la seconda legge di Newton, F = m.a, essendo a=dv/dt, risulta $F = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \equiv \frac{dp}{dt}$, perché m è costante.

Tenendo conto dell'espressione relativistica di p avremo: $F = \frac{d(Mv)}{dt} = M\frac{dv}{dt} + v\frac{dM}{dt}$, da cui segue

[2] Vedi R. Resnick, "Introduzione alla relatività ristretta, Casa Editrice Ambrosiana, Milano 1969

[3] Robert Resnick, "Introduzione alla relatività ristretta", Casa Editrice ambrosiana, Milano 1969 oppure Elio Fabbri, "Per un insegnamento moderno della relatività", A.I.F. Pisa 1989.

$$T=\int_0^x F.dx=\int_0^p \frac{dp}{dt}vdt=\int_0^v vd\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)=\int_0^v vd(M(v)v)=\int_0^v Mv.dv+v^2.dM.$$

Inoltre, da $M=m/\sqrt{1-v^2/c^2}$, si ha: $M^2c^2-M^2v^2=m^2c^2$, da cui differenziando e dividendo per 2M si ottiene $c^2dM-v^2dM-M.v.dv=0$ (m^2c^2 è costante) e infine

$$T=\int_0^v c^2dM=c^2M(v)-c^2M(0)=c^2(M-m)=(\gamma-1).mc^2.$$

L'approssimazione non relativistica.

Se v è molto piccola rispetto a c, γ tende a 1 e p=γ.mv tende alla quantità di moto classica mv.

La stessa drastica approssimazione non basta per l'energia cinetica (perché?). Si osservi però che

$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cong\frac{1}{1-\frac{v^2}{2c^2}}\cong 1+\frac{v^2}{2c^2}$ e pertanto $T=\frac{1}{2}m.v^2$, che è la formula classica.

Un'osservazione estremamente importante è la seguente. Se invece di T consideriamo la grandezza $E=\gamma mc^2$, E appare la somma dell'energia di moto T e del termine mc^2, detto energia di quiete. Ma c'è di più. Come l'intervallo spazio-temporale $ds=\sqrt{(dt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2}=d\tau$ è un invariante relativistico perché rappresenta il tempo proprio, anche

[1] $(E)^2-(pc)^2=(mc^2)^2$ è un invariante perché m e c sono invarianti.

Dalla [1] segue intanto che in meccanica relativistica, se la p si conserva, anche E (energia totale relativistica) si conserva, a differenza della meccanica classica in cui si può avere conservazione della quantità di moto e non dell'energia, come in un urto anelastico. In un urto anelastico si sviluppa energia di quiete, che compensa la diminuzione dell'energia di moto T.

Si noti ancora che da $E=\gamma mc^2,\ p=\gamma mv$ segue

[2] $$\frac{E}{p}=\frac{c^2}{v}.$$

In particolare per i fotoni, essendo v = c, segue E=pc e dalla [1] m=0. Vale anche il viceversa: se m=0, E = pc e v=c. Cioè, una particella va alla velocità della luce se e solo se la sua massa è zero.

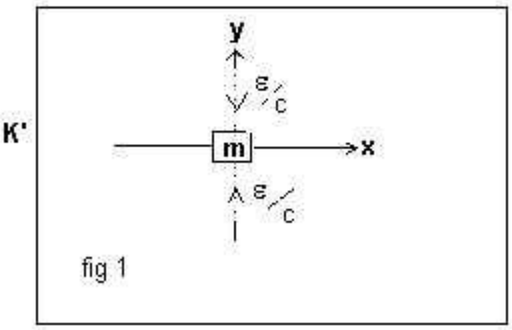
Nota didattica. Da ciò segue che la distinzione tra massa di quiete e massa relativistica (massa di moto) è fuorviante. Per un fotone, infatti, che vorrebbe dire massa di quiete? Che ne devo misurare la massa in un riferimento in cui è fermo? Ma un fotone è un quanto d **luce** e va sempre, in ogni sistema di riferimenti, alla velocità della **luce!**

Si intende, perciò, che la massa è la massa di Newton, quella che intendono i fisici parlando di massa di una particella, quella che per i corpi macroscopici si misura con la bilancia, dopo averli portati in quiete nel sistema del laboratorio. E' chiaro che per particelle che decadono in tempi estremamente brevi, come per esempio i pioni, la massa (di Newton, altrimenti le misure non sarebbero confrontabili con quelle realizzate da altri) si misura tramite la [1], dopo aver determinato l'energia (E) e la quantità di moto (p) con tecniche di fisica nucleare.

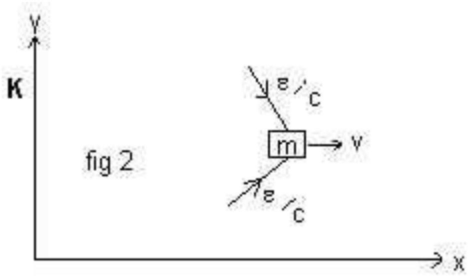
E' interessante osservare che, come p=mdx/dτ, (a rigore la componente x di p), analogamente E=mc^2dt/dτ, ponendo in luce l'analogia tra coordinate spaziali e tempo da una parte, quantità di moto ed energia dall'altra.

Concludendo questa prima parte: **se su una particella si compie lavoro applicando una forza che porta la sua velocità da zero a v, ma non modifica la sua massa, l'energia totale della particella, cioè quella cinetica più quella di quiete, sarà $E = \gamma mc^2$.**
Consideriamo ora l'inerzia dell'energia**. Einstein si chiede: l'inerzia di un corpo, cioè la sua massa dipende dal suo contenuto di energia?** Vediamo che la risposta è affermativa.

Immaginiamo che su un corpo (macroscopico) di massa m, in quiete in un riferimento K', arrivino lungo l'asse y e con verso opposto, due quanti di luce, ciascuno di energia ε' e impulso ε'/c. L'impulso



del corpo è zero prima e dopo l'assorbimento. Vedi fig. 1.
Osserviamo ora il processo da un riferimento K rispetto al quale K' si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v lungo l'asse x. Vedi figura qui sotto (fig. 2)



I fotoni si muovono obliquamente con energia ε e quantità di moto ε/c, formando con l'asse y un angolo α tale che sen(α) = v/c.
Siccome in K' la quantità di moto si conserva (è zero prima e dopo l'assorbimento), per il principio di relatività si deve conservare anche in K. Però c'è un fatto. Siccome la velocità di m è quella v del riferimento K' rispetto a K, prima dell'assorbimento era $\gamma mv + 2\frac{\varepsilon}{c} sen(\alpha) = \gamma mv + 2\frac{\varepsilon v}{c^2}$
e dopo sarebbe γmv, contro la legge di conservazione. Dobbiamo pensare perciò che dopo l'assorbimento la massa (di quiete!) sarà m'.
Pertanto $m' = m + \frac{2\varepsilon}{\gamma c^2}$.

Vediamo che succede per l'energia. Prima dell'assorbimento era $\gamma mc^2 + 2\varepsilon$, dopo sarà $\gamma m' c^2$ e siccome l'energia si deve conservare, si dovrà avere

$$\gamma mc^2 + 2\varepsilon = \gamma m' c^2 .$$

Da qui ricaviamo $m' = m + \frac{2\varepsilon}{\gamma c^2} = m + \frac{\Delta E}{\gamma c^2}$ e infine $\Delta E = \gamma c^2 \Delta m.$ Si ottiene in definitiva

$$E = \gamma mc^2$$

a meno di una costante che si pone uguale a zero, perché quando il corpo è fermo vogliamo che sia $E = mc^2$.

La conclusione è che una stessa legge, $E = \gamma mc^2$, dà l'energia di un corpo quando, applicando una forza, se ne modifica la velocità senza modificare la massa e quando, senza alterare la velocità, se ne modifica la massa fornendogli o sottraendogli energia sotto forma di radiazione. Ma siccome ogni forma di energia assorbita finisce per dare sviluppo di calore, alla fine non resta traccia della radiazione e dunque il risultato ottenuto è generale.[4]

Si noti esplicitamente che l'energia di un corpo può variare anche se il corpo era e resta in quiete, per esempio se assorbe o emette radiazione o calore. Siccome in caso di quiete γ=1, la variazione di energia non può che tradursi in variazione di massa (la massa di Newton, è ovvio).

Due esempi quantitativi.

Esempio 1

In una tipica reazione chimica l'energia coinvolta è dell'ordine di 10 eV per molecola e quindi per una mole il calore di reazione è $Q = 10.1,6.10^{-19}.6,02.10^{23} \cong 9,6.10^5\,J \cong 220Kcal.$

Perciò la variazione di massa è $\Delta m = \dfrac{Q}{c^2} \cong 10^{-11}Kg = 10^{-8}g$, quantità chiaramente inapprezzabile, perciò in chimica vale con grande approssimazione la legge di **Lavoisier**.

Esempio 2

Nella reazione nucleare di fusione dell'idrogeno in elio, per ogni nucleo di elio prodotto si liberano 28 MeV di energia sotto forma di quanti gamma. Nella sintesi di una mole di elio si libera perciò una quantità di energia pari a $E = 28.10^6.1,6.10^{-19}.6,02.10^{23} \cong 2,7.10^{12}\,J$.

Si ha perciò una diminuzione di massa pari a $\Delta m = \dfrac{E}{c^2} = \dfrac{2,7.10^{12}}{9.10^{16}} \cong 0,03g$, quantità facilmente misurabile.

Nota sull'elettromagnetismo.

La teoria elettromagnetica di Maxwell è già per sua natura relativistica, perché il campo elettromagnetico si propaga con la velocità della luce. E' significativo che le equazioni di Maxwell implicano che il campo si propaghi con una velocità

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

uguale cioè all'inverso della radice quadrata del prodotto della costante dielettrica del vuoto e della permeabilità magnetica del vuoto.

Ma queste due costanti non hanno nulla a che vedere con lo stato di moto, dunque la velocità espressa tramite dette costanti deve essere la stessa in ogni sistema di riferimento.

Un'ultima considerazione. Nella teoria di Maxwell campo elettrico e campo magnetico sono indipendenti nel caso statico; essi sono connessi quando variano nel tempo, ma il collegamento è di tipo fenomenologico, cioè si descrive in che modo ogni volta che un campo elettrico varia nel tempo, si produca un campo magnetico variabile nel tempo e viceversa, ma di ciò non si dà una interpretazione a livello più profondo. La teoria della relatività permette invece di mostrare che cariche in moto

[4] Vedi Elio Fabbri, "Per un insegnamento moderno della relatività, A.I.F., Pisa 1989

debbono **di necessità** produrre un campo magnetico, come conseguenza della dilatazione del tempo. In particolare, se esistessero agenti fisici dotati di velocità di propagazione infinita, non ci sarebbe campo magnetico.
Siccome non ne parlerò in questo corso, chi è interessato può consultare:per una trattazione elementare, il testo di Orear[5]; per una trattazione a livello più avanzato, "La fisica di Berkeley"[6].

[5] Jay Orear, "Fisica generale", Zanichelli, Bologna 1973
[6] AA.VV. "La fisica di Berkeley", 2° volume (elettricità e magnetismo), Zanichelli, Bologna 1971

Cap 3 Relatività generale e Gravitazione

Da Newton ad Einstein

1°) Le leggi fondamentali della meccanica di Newton sono il 2° principio **F =** m.**a** e la legge della gravitazione universale che, col senno di poi, scriverò in forma lievemente diversa dal solito:

$$\vec{F} = -G\frac{M_g.\mu}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Con M_g e con μ intendo il quid che produce la forza gravitazionale e che, per analogia con le cariche elettriche, chiamerò cariche gravitazionali dei due corpi interagenti, per esempio il Sole e un pianeta oppure la Terra e un sasso o un satellite, naturale o artificiale. Non c'è nessun motivo a priori per sostituire la carica gravitazionale con la massa, che invece misura l'inerzia o riluttanza di un corpo a cambiare lo stato di moto e che compare nella 2ª legge di Newton.
In particolare, nel caso della Terra e in prossimità della sua superficie,

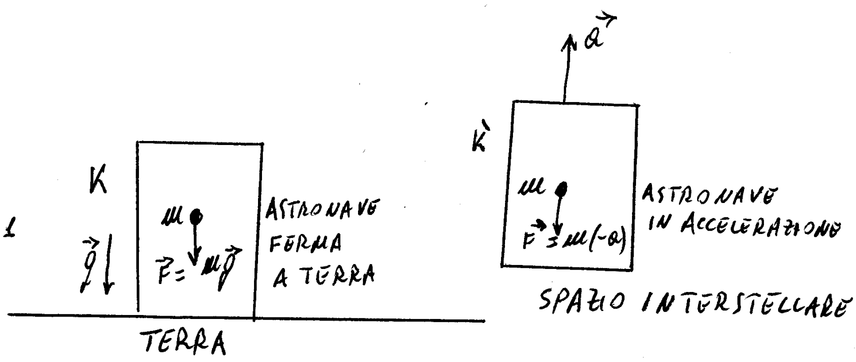
$$\vec{F} = -G\frac{M_g.\mu}{R^2}\frac{\vec{R}}{R} = m.\vec{g}$$

e perciò l'accelerazione di gravità in modulo è $g = \frac{GM_g}{R^2}\frac{\mu}{m}$.

Pertanto g varia da corpo a corpo, a meno che μ non sia proporzionale ad m, come Newton trovò sia dall'osservazione delle orbite dei satelliti medicei di Giove, sia sperimentalmente misurando il periodo di oscillazione di pendoli di uguale lunghezza, riempiendo una sfera cava di materiali i più diversi per massa e composizione chimica. All'inizio del 1900 il fisico ungherese Eòtvos provò la proporzionalità tra carica gravitazionale e massa con misure di alta precisione mediante pendoli composti e bilancia di torsione (errore relativo delle misure inferiori a 10^{-11}). Una volta accertata la proporzionalità, la carica gravitazionale fu identificata con la massa scegliendo come unità di misura della carica gravitazionale la carica gravitazionale dell'unità di massa. E' questo il motivo per cui nei libri si enuncia la legge di gravitazione dicendo che la forza è proporzionale al prodotto delle ***masse***.
2°) Per due secoli i fisici ripeterono quanto già aveva notato Newton, e cioè lo status eccezionale della forza di gravità che è proporzionale alla massa, per cui un corpo in un campo di gravità cade con un'accelerazione indipendente dalla sua massa. Fatto eccezionale, perché non è vero per le altre forze; l'accelerazione acquistata da una pallina spinta da una molla è, a parità di molla e compressione, inversamente proporzionale alla massa della pallina, lo stesso dicasi delle forze elettriche e magnetiche.
In verità i fisici, e anche voi che non siete fisici di professione, conoscevano un'altra forza proporzionale alla massa, cioè la forza d'inerzia, detta di solito forza apparente, perché non è di gravità, non è elettrica o magnetica (di forze nucleari ancora nessuno sapeva nulla, ma vi assicuro che non si tratta di forze nucleari); ma allora non era una vera forza, era …. ***apparente.***
Ecco di ché si tratta. Se K' è un riferimento accelerato rispetto a un riferimento inerziale K, per esempio se K' è un autobus che improvvisamente frena, e K è la crosta terrestre (**per brevi periodi di tempo la crosta terrestre è un riferimento inerziale**), tutto ciò che è dentro l'autobus viene spinto in *avanti* da una forza pari alla massa del corpo per l'accelerazione di K' cambiata di segno. Perciò il corpo acquista un'accelerazione indipendente dalla sua massa, perché è quella dell'autobus cambiata di segno. E' questa la forza d'inerzia, cioè dovuta al fatto che K' non è inerziale. Se qualcuno, a causa della frenata, casca e si fa un bernoccolo, si può consolare, se vuole, dicendo: "in fondo si tratta solo di una forza apparente". Però il bernoccolo è reale a tutti gli effetti. Un altro tipo di forza di inerzia o, se preferite, apparente (ma attenti ai bernoccoli), è quella che si manifesta quando K' descrive una

traiettoria curvilinea, il ché richiede una forza centripeta per costringere K' a descrivere la curva. Chi è dentro K' (il solito autobus in curva che intanto sta in curva in quanto c'è la forza centripeta d'attrito), risente una forza d'inerzia detta (per il solito cambiamento di segno) *centrifuga*.
3°) Poi venne Einstein e nel 1907, avendo notato che sia la forza di gravità sia la forza d'inerzia sono proporzionali alla massa, enunciò il famoso principio di equivalenza, sul quale dopo nove anni di studio edificò la relatività generale e la nuova teoria della gravitazione.
Principio di equivalenza. Un riferimento accelerato è a tutti gli effetti equivalente (***localmente***) a un riferimento inerziale nel quale è presente un campo di gravità. Ciò significa che restando all'interno di un sistema di riferimento K', non è possibile sapere se K' è fermo in un riferimento inerziale K nel quale agisce un campo di gravità, oppure è lontano da ogni campo gravitazionale e però si muove rispetto a K di moto accelerato con accelerazione opposta a quella del presunto campo di gravità.

Fig 1



Tutti i sistemi di riferimento, pertanto, e non solo quelli inerziali, sono ugualmente legittimi per descrivere i fenomeni naturali. In questa generalizzazione sta il motivo del nome di ***Relatività generale*** dato da Einstein alla nuova teoria, rispetto alla quale la prima teoria del 1905 venne detta ***ristretta** o **speciale.*** L'avverbio ***localmente*** attribuito all'equivalenza tra forza gravitazionale e forza d'inerzia, sarà giustificato nel prossimo paragrafo e darà conto del perché la relatività generale è anche una ***teoria della gravitazione***.
4°) **Equivalenza locale.**
Dal principio di equivalenza discende che un campo di gravità può essere neutralizzato nell'interno di un riferimento K' in caduta libera in quel campo, per esempio l'ascensore di Einstein, che precipita (ahi!), ma oggi possiamo pensare a un'astronave in orbita inerziale (a motori spenti) intorno alla Terra., Ora non fa più notizia, ma pensate agli astronauti che si librano e stanno a mezz'aria nell'interno della navicella.
Il fatto è che quello che ho detto non è proprio vero. La gravità non si annulla in tutta l'astronave, ma a rigore solo nel suo centro di massa O. (Vedi Fig 2).
Posta uguale a r la distanza tra O e il centro della Terra C, l'accelerazione in O, rispetto all'astronave K', è zero perché l'accelerazione di gravità è bilanciata, dentro K', dall'accelerazione centrifuga:

[1] $$a(r) = \frac{-GM}{r^2} + \frac{v^2}{r} = 0 \; .$$

Nel punto A, a quota z rispetto ad O, l'accelerazione rispetto a K' non sarà zero, ma

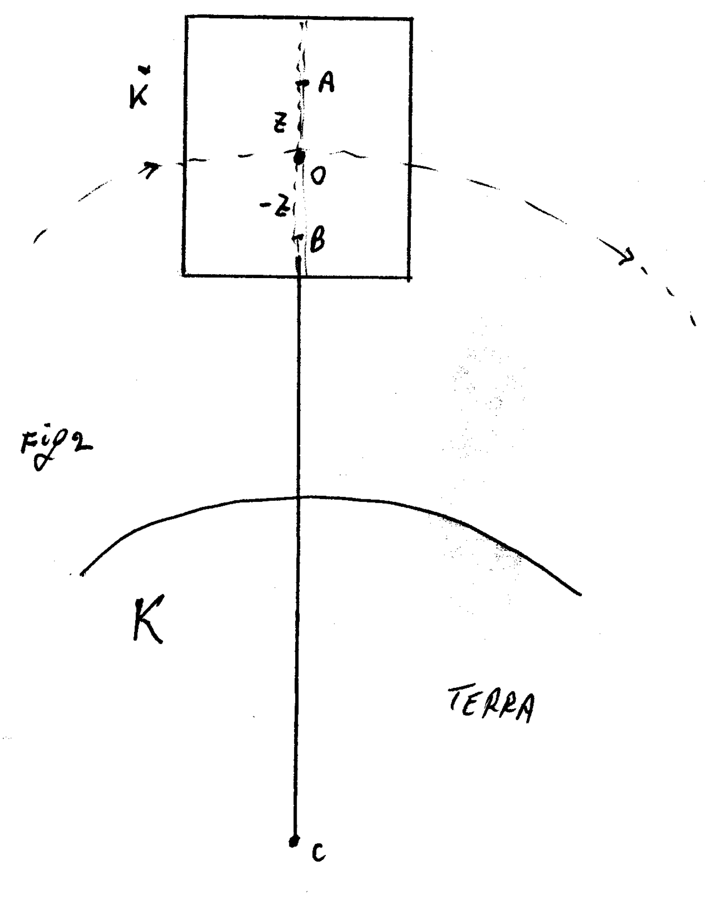
$$a(r+z) = \frac{-GM}{(r+z)^2} + \frac{v^2}{r+z} = \frac{-GM}{r^2(1+\frac{z}{r})^2} + \frac{v^2}{r(1+\frac{z}{r})} \; .$$

Se z è piccolo rispetto a r, si ottiene, approssimando i binomi in parentesi,

$$a(r+z) \cong \frac{-GM}{r^2}(1-\frac{2z}{r})+\frac{v^2}{r}(1-\frac{z}{r})$$

e tenendo conto della [1] infine si ha

[2] $$a(r+z) \cong +\frac{GMz}{r^3}$$



Dire che l'accelerazione in A, rispetto ad O è positiva significa che una particella posta in A se ne allontana salendo verso l'alto, verso positivo di r. Se fosse posta in B, l'accelerazione a(r-z) sarebbe negativa e, nell'ipotesi di z piccola, opposta ad a(r+z).
L'accelerazione a(r+z) è detta accelerazione residuale e fa sì che il riferimento K' è equivalente a un riferimento inerziale K solo ***localmente***, cioè solo se K' è di piccola (infinitesima) estensione spaziale e temporale. L'accelerazione residuale è detta anche accelerazione di **marea** perché spiega il fenomeno delle maree proprio con l'effetto differenziale o residuale dell'attrazione lunare (o solare) sul centro della Terra e sulla sua parte superficiale.
L'equivalenza locale ha una conseguenza importantissima che richiese ad Einstein nove anni di studio per sviscerarla, cioè la necessità di introdurre non un unico sistema di coordinate cartesiane per

studiare la gravitazione, ma un'infinità di sistemi di coordinate cartesiane, uno per ciascun punto dello spazio (anzi dello spazio - tempo), e quindi globalmente un sistema di coordinate curvilineo. Questo è il significato dell'affermazione che lo spazio - tempo della relatività generale è curvo.
Einstein non possedeva gli strumenti matematici per affrontare lo studio dello spazio curvo, ecco perché dalla prima intuizione del 1907 passò quattro anni in tentativi non sempre felici, finché un suo amico, il matematico Marcello Grossman gli parlò del calcolo tensoriale assoluto degli italiani Gregorio Ricci Curbastro e Tullio Levi Civita, che avevano sviluppato gli studi di Gauss sulle superfici curve e quelli di Bernard Rieman sugli spazi "ellittici". Nel giro di pochi anni Einstein si impadronì dei nuovi metodi matematici e sul finire del 1915, in piena guerra mondiale, pubblicò a Berlino i risultati quasi definitivi.

Le verifiche sperimentali.

Le verifiche classiche della relatività generale sono
1°) la spiegazione del residuo di 42" d'arco per secolo della precessione del perielio di Mercurio. (Siccome il calcolo non è semplice, durante il corso al Liceo Scorza ho presentato una simulazione al computer).
2°) la deflessione di un raggio di luce che passa in prossimità di un corpo di grande massa. Già Newton aveva calcolato una deflessione di 0,87" d'arco per un raggio di luce stellare che sfiora la superficie del Sole. La teoria di Einstein prevede una deflessione doppia. Grande fu il clamore sollevato dalle osservazioni astronomiche di tale deflessione nelle due spedizioni organizzate dal grande astronomo inglese Arthur Eddington in occasione della eclisse totale di Sole nel 1919 in Guinea e in Brasile. Le osservazioni in verità non furono molto chiare e alcuni le contestarono. Ora si sfrutta la deflessione della luce di sorgenti stellari lontane che sfiora una pulsar, dato che la massa di una pulsar è dell'ordine di quella del Sole, ma il raggio è di poche decine di km, per cui la gravità è immensa.
Della deflessione della luce in campo di gravità darò solo un'indicazione qualitativa per motivi di brevità. Chi è interessato, veda bibliografia in nota 4.

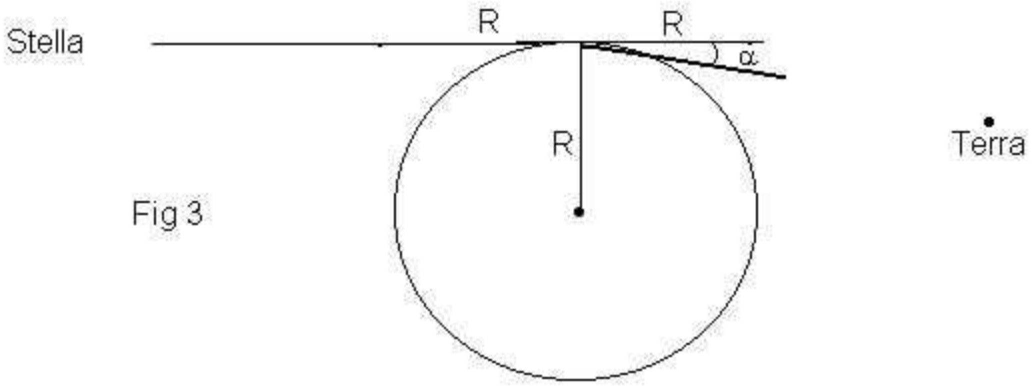


Fig 3

L'angolo di deflessione α vale, nel caso che il corpo deflettente sia il Sole, 1",74 d'arco, il doppio di quanto calcolabile con la legge di Newton e di quanto aveva trovato lo stesso Einstein nel 1911 con una teoria ancora incompleta.

$$\tan(\alpha) = 2.\frac{2GM}{c^2R} \cong \alpha$$ (se α è piccolo).

3°) il *red shift* gravitazionale, cioè l'aumento di lunghezza d'onda (spostamento verso il rosso) della luce che si propaga da una regione a forte campo di gravità a una regione a gravità minore. Il red shift gravitazionale è molto difficile da osservare per la luce proveniente da una stella, anche con intenso campo gravitazionale, perché tale effetto è mascherato dall'effetto Doppler, salvo che per il Sole di

cui si conosce con buona accuratezza la velocità e quindi lo spostamento Doppler; ma il Sole ha un campo di gravità non molto intenso. Si è sfruttata la luce proveniente da Sirio B, perché è una nana bianca e quindi ha un campo di gravità intenso, e inoltre fa parte di una doppia, la compagna è Sirio A, il ché permette di misurare lo spostamento Doppler con buona precisione.
Finalmente, nel 1960 i fisici americani Pound e Rebka determinarono in laboratorio terrestre il red shift gravitazionale misurando con tecniche nucleari la minuscola variazione di frequenza di un fascio di raggi γ su un dislivello di appena 22 metri.
Del red shift gravitazionale una dimostrazione elementare approssimata è riportata da vari autori[7],che essenzialmente risale allo stesso Einstein in una conferenza divulgativa del 1948. Si trova

[3] $$\frac{\Delta\nu}{\nu} \cong -\frac{gh}{c^2} \Rightarrow \nu_2 \cong \nu_1\left(1-\frac{gh}{c^2}\right)$$

sia utilizzando il principio di equivalenza e l'effetto Doppler, sia la conservazione dell'energia e la relazione di Plank - Einstein $\varepsilon=h\nu$ tra l'energia di un fotone e la frequenza. Qui h è la costante di Plank, mentre nella [3] h è la quota del rivelatore rispetto al trasmettitore di radiazione. $\Delta\nu = \nu(2)-\nu(1)$ è la differenza tra la frequenza misurata dall'apparato rivelatore e la frequenza emessa dal trasmettitore.
La formula esatta è la seguente: (U è l'energia potenziale gravitazionale U = -GM/R)

[4] $$\nu_2 = \nu_1\sqrt{\frac{1+{2U_1}/{c^2}}{1+{2U_2}/{c^2}}}$$

Esercizio: verificare che la [4] si riduce alla [3] nel caso che R(1) è il raggio del pianeta (o della stella) ed R(2), distanza del rivelatore dal centro del pianeta (o della stella), supera il raggio R(1) di una quantità h piccola rispetto ad R(1).

N.B. La lunghezza $R^* = \frac{2GM}{c^2}$ che compare nella deflessione della luce è detta *Raggio di Schwarzschild*. Questa quantità compare anche nella [4], in quanto $U = -\frac{GM}{R} = -\frac{c^2R^*}{2R}$ e pertanto

[5] $$\nu_2 = \nu_1\sqrt{\frac{1-{R^*}/{R_1}}{1-{R^*}/{R_2}}}$$

Per la Terra R* è 0,9 cm, per il Sole è 3 km, in ogni caso molto minore del raggio geometrico. Che accade se una stella è così compressa che il suo raggio geometrico scende al suo raggio R*? La [5] ci dice che ogni radiazione emessa ha frequenza zero e perciò nulla, neanche la luce, può uscire da quella stella. La stella è un **buco nero.**
E' curioso notare che Laplace aveva già trovato ***R**** classicamente, ponendo la velocità di fuga uguale a c :

[7] Elio Fabbri, "Per un insegnamento elementare della relatività", A.I.F. Pisa 1989
Tullio Regge e Giuseppe Peruzzi, "Spazio, tempo e universo", Utet, Torino 2003.

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-G\frac{Mm}{R}) = 0,$$

da cui, ponendo v = c, segue

$$R = \frac{2GM}{c^2} = R^*.$$

Esercizio.

Determinare la densità media di un buco nero sferico di massa pari a quella

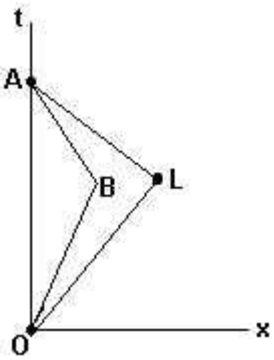
a) della Terra (massa circa 5,5. 10^{24}Kg);
b) del Sole (massa circa 2.10^{30} Kg);
c) della Galassia (massa circa 10^{42} Kg).

Si confronti con la densità del protone (m=1,67.10^{-24} Kg, r=10^{-15} metri).
Siccome è presumibile che non si possano avere densità superiori a quella del protone, che cosa si può desumere dai confronti precedenti?

Cap 4 Appendice

Il paradosso dei gemelli

Per il gemello rimasto sulla Terra in posizione X(O) il tempo proprio trascorso dalla partenza del gemello in O fino al suo ritorno in A è dato dalla differenza τ(A) - τ(O). Per il gemello che si è allontanato dalla Terra di un tratto X(B) - X(O) e poi è tornato sulla Terra in A (stessa ascissa di O), il tempo proprio è (OB + BA)/c, **minore** di τ(A) - τ(O).



Infatti

$$\frac{OB + BA}{c} = (\tau_A - \tau_O)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Si noti che la spezzata OLA rappresenta la linea oraria di un raggio di luce. L'astronave che si muove con velocità v rispetto alla Terra, essendo **v<c**, ha una linea oraria OBA più ripida, più vicina all'asse dei tempi.

Sono i tempi propri che risultano diversi. Il tempo proprio del gemello *viaggiatore* è minore del tempo proprio del gemello *sedentario:* chi viaggia resta più giovane! Non è un'apparenza; il tempo proprio in un satellite artificiale è minore del tempo proprio sulla Terra e oggi questa cosa è diventata tecnologia, è sfruttata nel GPS.

Inversione temporale e causalità.

Dato che la durata di un processo è relativa allo stato di moto del sistema di riferimento in cui è studiata, vediamo sotto quali condizioni un evento A che precede un evento B nel riferimento K possa avvenire dopo di B in un riferimento K'. Sia dunque $t_A < t_B$.

Dalla trasformazione di Lorenz $t' = \dfrac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ segue $t'_A > t'_B$ se $t_A - \frac{v}{c^2}x_A > t_B - \frac{v}{c^2}x_B$

ovvero $t_B - t_A < \dfrac{v}{c^2}(x_B - x_A)$, il ché implica, essendo v < c, $c(t_B - t_A) < x_B - x_A$.

Ciò significa che si può avere inversione temporale, se la separazione spaziale tra A e B nel verso del moto relativo di K' rispetto a K è maggiore della distanza che la luce può percorrere nell'intervallo di tempo che in K separa i due eventi. In tal caso la velocità v di K' rispetto a K deve essere maggiore di $\dfrac{c^2(t_B - t_A)}{x_B - x_A}$.

Supponiamo ora che l'evento A sia causa di B. In tal caso l'ordine temporale deve essere **assoluto**, cioè, in ogni possibile riferimento, A (causa) deve precedere B (effetto). Se infatti in qualche riferimento K' l'effetto B potesse precedere la causa A, l'agente fisico che causa B dovrebbe propagarsi più velocemente della luce. Vediamo dunque che la teoria della relatività è coerente col principio di antecedenza della causalità.

Quesiti.

1) Gli astronomi un certo giorno hanno osservato un brillamento solare alle ore 12, 8 minuti e 17 secondi, per cui, tenendo conto della velocità della luce e della distanza Sole - Terra, hanno dedotto che il brillamento è avvenuto esattamente alle ore 12. Alle ore 12 e 5 minuti dello stesso giorno è stato notato un forte disturbo nelle comunicazioni radio. Un giornalista ha avanzato l'ipotesi che il disturbo radio sia stato provocato dal brillamento solare (infatti i brillamenti solari provocano tempeste magnetiche sulla Terra). Secondo voi, l'ipotesi del giornalista nel caso presente è corretta?
2) Il mesone K° è una particella neutra instabile che, con vita media di circa 10 nano-secondi, decade in una coppia di pioni, ovviamente uno positivo e l'altro negativo. Sapendo che la massa del K° è di 498 MeV e che la massa di ciascun pione è di 140 Mev, rispondere alle seguenti domande:
   a) Quanta massa è perduta nel processo di creazione della coppia (π^+, π^-)? (Esprimere la diminuzione di massa in MeV, Joule, Kg);
   b) dire come sono correlate le direzioni delle velocità dei due pioni nel sistema di riferimento in cui il mesone K° è fermo;
   c) calcolare il modulo delle velocità dei pioni creati nel processo.
3) Sapendo che la massa di un elettrone è di 0,511 MeV (cioè di $0,91.10^{-30}\,Kg$), (a) dire qual è l'energia minima di un fotone che si materializza in una coppia elettrone - positone (il positone o elettrone positivo è l'antielettrone). (b) Se l'elettrone e il positone sono creati in queste condizioni, essi inizialmente sono in quiete (non avanza energia) e perciò la creazione della coppia non può

avvenire nel vuoto, ma solo in prossimità di una particella pesante, per esempio un nucleo atomico: come mai? (c) Se poi un positone interagisce con un elettrone ed entrambi sono in quiete, essi si *annichilano* in due fotoni (quanti γ): come mai non in un solo fotone? Come si muovono i due fotoni? L'annichilazione può avvenire in tre fotoni o c'è qualche legge fisica che lo vieta?

4) Una particella di massa m che viaggia alla velocità 0,6c subisce un urto completamente anelastico con una particella di uguale massa inizialmente ferma. Quale è la velocità del corpo risultante? Quale è la sua massa? (Applicare la conservazione della quantità di moto e la conservazione dell'energia: all'inizio la quantità di moto è solo quella della particella in movimento, l'energia è la somma dell'energia totale della prima particella e dell'energia di quiete della seconda; dopo c'è una sola particella di velocità xc e di massa M che non è detto che sia 2m, anzi si prevede una massa maggiore di 2m, dato che nell'urto le due particelle si riscaldano. Si trova all'incirca V=0,33c ed M=2,12m. Generalizzare il problema supponendo che la velocità della particella in moto sia αc e mostrare che, se α è molto piccola rispetto ad 1, V è circa la metà di αc ed M è circa 2m, come vuole la meccanica classica.
5) Due particelle di uguale massa m e velocità opposte nel sistema del laboratorio si scontrano frontalmente e restano attaccate. Quali devono essere le velocità affinché la massa finale complessiva sia 2,5m? Se le velocità sono c/3, qual è la massa finale?

Moto iperbolico.

Vogliamo studiare l'analogo relativistico del moto uniformemente accelerato. Sia F una forza costante agente su una particella di massa m, inizialmente in quiete nell'origine dell'asse x lungo il quale agisce la forza.

La legge fondamentale della dinamica dà

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

da cui, posto a=F/m, segue

$$\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = at$$

e risolvendo rispetto a v:

$$v = \frac{at}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}$$

Si noti che, per t<<c/a, v è circa uguale ad at, come in cinematica classica, mentre, per t molto grande, la velocità v tende alla velocità limite c, come deve essere.

Integrando la velocità rispetto al tempo, tenuto conto che x=0 per t=0, si ottiene:

$$x = \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right)$$

che per t piccolo si approssima alla legge parabolica classica di Galilei ($x = \frac{1}{2}at^2$), mentre in generale il suo grafico nel piano t - x è un ramo di iperbole con asintoto $x = ct - \frac{c^2}{a}$

e al tendere di t all'infinito x tende a ct. (Man mano che la velocità si avvicina a c, il moto tende a diventare uniforme).

Red Shift relativistico

Che in un campo gravitazionale il colore della luce si sposti verso il rosso si può giustificare in due modi: primo, col principio di equivalenza e con l'effetto Doppler; secondo, con l'inerzia dell'energia. In ogni caso faremo l'ipotesi di campo debole.

Primo modo.

Immaginiamo che in un riferimento inerziale K ci sia una scatola K' di altezza h che si muova verso l'alto con accelerazione g. All'istante iniziale K' abbia velocità 0 e la sua origine O' coincida con l'origine O di K; in quell'istante parta da O verso l'alto un segnale luminoso monocromatico di frequenza ν che arriva a un rivelatore R posto sul tetto di K' all'istante t praticamente pari ad h/c. (Calcolare per esercizio *esattamente* t e poi approssimarlo nell'ipotesi che g sia piccola, per esempio 10 metri al s^2). Però all'istante t K' avrà una velocità V=gt=gh/c, perciò la radiazione, per effetto Doppler, sarà ricevuta da R con frequenza ν' minore di ν (K' si allontana da K); perciò si avrà un red shift

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu'-\nu}{\nu} = \frac{-V}{c} = -\frac{gh}{c^2} \quad .$$

Supponiamo ora che K' sia fermo in K nel quale agisca ora un campo di gravità g verso il basso. Per il principio di equivalenza il rivelatore R riceverà una frequenza ν' come nel caso dell'effetto Doppler. N.B. Il Red Shift calcolato è valido se il potenziale di gravità gh è piccolo rispetto al quadrato di c.

Secondo modo.

La seconda deduzione del red shift relativistico sfrutta l'inerzia dell'energia.

Immaginiamo due corpi, A e B, a livello zero in un campo di gravità g (verso il basso). B abbia massa m. Solleviamo B di un tratto h, spendendo una quantità di energia L1=mgh. A questo punto parta da A un fascio di n fotoni ciascuno di energia ε che è assorbito da B. Detta ε' l'energia dei fotoni quando arrivano a B (a priori potrebbe essere ε'=ε), la massa di B sarà $m' = m + \frac{n\varepsilon'}{c^2}$.

Quando B ritorna a quota zero, compie un lavoro L2=m'.gh e quindi ci sarà un guadagno di energia pari a L2-L1= $n\varepsilon' gh / c^2$. Poi B restituisce ad A l'energia nε' che ha ricevuto e torna allo stato iniziale. Ma A ha ceduto l'energia nε e ha avuto in restituzione nε', perciò il bilancio energetico richiede che sia $n\varepsilon - n\varepsilon' = \frac{n\varepsilon'}{c^2}gh$ e quindi alla fine $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1+\frac{gh}{c^2}}$.

Nella solita ipotesi che sia $gh \ll c^2$, si ha l'approssimazione $\varepsilon' \cong \varepsilon(1 - gh/c^2)$ e quindi $\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{gh}{c^2}$ che conduce al red shift calcolato col primo procedimento, applicando la formula di Plank - Einstein ε=hν.

Bibliografia

Riporterò i riferimenti bibliografici non nell'ordine delle note, ma in ordine sistematico e possibilmente cronologico, indicando anche altri testi, a beneficio di chi voglia farne uso.

Opere accessibili anche agli studenti:

1) Albert Einstein "Sulla teoria speciale e generale della relatività", Zanichelli, Bologna 1921 (E' un classico, che tutti dovrebbero conoscere)
2) Rodolfo Lammel, "I fondamenti della teoria della relatività", Zanichelli, Bologna 1923 (Pur contenendo posizioni opinabili, è notevole per la presentazione e la discussione di fenomeni quali l'aberrazione delle stelle e di altri fenomeni che storicamente si presentarono come rompicapo della fisica classica)
3) Arthur Eddington, " Spazio tempo e gravitazione", Boringhieri, Torino 1963 (L'edizione inglese è del 1920. E' un'opera di alta divulgazione con stimolanti spunti personali. Ricordo che a questo grande astronomo è dovuta l'organizzazione delle spedizioni scientifiche in Africa e in Brasile in occasione dell'eclissi solare del 1919 per osservare la deflessione della luce stellare passante in prossimità del bordo del Sole.)
4) Elio Fabbri, "Per un insegnamento moderno della relatività", A.I.F. Pisa 1989 (E' un'opera didatticamente efficace; tratta del modo di introdurre la relatività ristretta e generale nei Licei in modo stimolante e matematicamente accessibile. La considero eccellente per tracciare una linea didattica personale.)
5) Jay Orear, "Fisica generale", Zanichelli, Bologna 1973 (Il testo è stato scritto per essere usato nell'insegnamento liceale. Per la derivazione del campo magnetico come correzione relativistica del campo elettrico si veda il cap. 8)

A un livello più elevato:

6) August Kopff: "I fondamenti della relatività einsteiniana", Hoepli, Milano 1923 (Tratta essenzialmente la relatività ristretta, l'impostazione è alquanto piatta, però va segnalata l'appendice, voluta dai curatori italiani e dall'editore, che raccoglie una ventina di scritti di matematici, fisici, astronomi e filosofi italiani: andrebbe letta da docenti e studenti per avere una panoramica storica del clima scientifico nell'Italia del primo '900)
7) Mario Pantaleo (a cura di), "Cinquant'anni di relatività", coedizione Giunti-Sansoni, Firenze 1955 (opera realizzata per festeggiare il cinquantenario della relatività, contiene monografie di insigni studiosi italiani sui vari aspetti teorici e sulle verifiche sperimentali e astronomiche , nonché un saggio del filosofo Aliotta. In appendice sono riportate le traduzioni delle memorie originali di Einstein sulla relatività. La prefazione dello Stesso Einstein, scritta a Princeton il 4 aprile 1955, 14 giorni prima della sua morte, rappresenta probabilmente l'ultimo scritto scientifico del grande scienziato. Notevole il contributo del matematico Francesco Severi, che introduce i fondamenti della teoria ristretta svincolandola da una aprioristica dipendenza dalla velocità della luce. Mirabile è l'articolo di Giovanni Polvani su *il moto della Terra, filo storico della relatività*..)
8) Richard Feynman, "La fisica di Feynman", Zanichelli, Bologna 2001 (E' un classico della fisica scritto da un protagonista. Sono tre volumi con testo inglese a fronte. La parte che qui interessa occupa i capitoli 15, 16 e 17 del 1° volume. L'edizione originale risale al 1965)
9) Paul Schilpp (a cura), "Albert Einstein scienziato e filosofo", Boringhieri, Torino 1958 (Raccoglie scritti di grandi scienziati e filosofi di tutto il mondo, con un'autobiografia di Einstein, *il famoso*

necrologio, e la sua replica finale. Quasi tutti gli scritti sono accessibili anche senza particolari strumenti matematici. Se ne raccomanda la lettura a docenti e studenti)

10) Robert Resnick, "Introduzione alla relatività ristretta", Editrice Ambrosiana, Milano 1968 (In questo volume si trova una presentazione chiara e rigorosa del formalismo e dei principi fisici della relatività ristretta, esemplare lo studio dell'effetto Doppler e dell'aberrazione stellare visti nel loro aspetto unitario, le due facce di un medesimo fenomeno. Il testo è arricchito da una nutrita raccolta di quesiti e problemi).

La bibliografia sulla relatività è sterminata; altri testi per approfondimenti a vari livelli sono:

11) Riccardo Becker, "Teoria dell'elettricità", Sansoni, Firenze 1950 (Opera in due volumi, estremamente chiara. La parte riguardante la relatività (ristretta) è nel 2° volume e tratta la cinematica, la dinamica e l'elettromagnetismo.)
12) Enrico Persico, "Introduzione alla fisica matematica", Zanichelli, Bologna 1960 (La relatività ristretta è trattata nel 9° capitolo. Notevoli la chiarezza e l'efficacia della parte introduttiva; le pagine sull'elettromagnetismo si leggono con una certa difficoltà per la notazione usata)
13) Kittel e Altri, "La fisica di Berkeley", Zanichelli, Bologna 1970 (La relatività ristretta è trattata nel 1° volume (Meccanica) in modo spigliato e moderno. I mezzi matematici sono accessibili anche a studenti liceali, pur essendo il trattato rivolto a studenti universitari del primo biennio.)
14) Herbert Goldstein. "Meccanica classica", Zanichelli, Bologna 1971 (Interessa la relatività ristretta il capitolo 6, ma tutta l'opera è articolata in modo da arrivare alla meccanica relativistica come al coronamento della meccanica classica, e non più come a una rottura traumatica con la fisica di Newton. E' a livello universitario)
15) Emilio Segré: "Personaggi e scoperte nella fisica contemporanea", Mondadori, Milano 1976 (L'autore, allievo di Fermi, premio Nobel, ha vissuto in prima persona l'affascinante sviluppo della fisica del '900, prima in Italia e poi negli Stati Uniti e la lettura del libro è coinvolgente come un romanzo, un romanzo scientifico, si badi, non di fatterelli. Il capitolo v "*Einstein, nuovi modi di pensare*" tratteggia magistralmente la biografia scientifica di Einstein, sottolineando i contributi fondamentali da questi dati anche alla nascente meccanica quantistica)
16) Silvio Bergia, "Einstein", Le Scienze, Milano 1998 (Nella collana *I grandi della scienza*. Inquadra la figura e l'opera di Einstein nel contesto storico e con problematiche legate alla ricerca moderna. Il testo non presenta difficoltà matematiche.)
17) Fernando De Felice, "Spazio, tempo e relatività", Le Scienze, Milano 2000 (Nella collana *Quaderni di Le Scienze*. Il titolo riecheggia quello di Eddington, però le problematiche sono quelle della moderna ricerca, con particolare riguardo allo studio dei Quasar, delle Pulsar, dei Buchi Neri, della radiazione fossile, al complesso della cosmologia, che la relatività generale, e le osservazioni astronomiche iniziate negli anni '20 del ventesimo secolo con i famosi *scandagli celesti* del grande astronomo Edwin Hubble, hanno fatto uscire dalle riflessioni puramente filosofiche per assoggettarla ad indagine scientifica.)
18) Tullio Regge e Giulio Peruzzi: "Spazio, tempo e universo", Utet, Torino 2003. (E' un libro di notevole efficacia didattica. La prima parte è opera di Peruzzi, storico della fisica, che offre un panorama chiaro e ricco sul piano storico e una bella sintesi teorica. Regge, grande conoscitore della relatività, illustra da maestro e con metodi quasi sempre accessibili senza tanta matematica lo sviluppo della relatività generale, le prove classiche della teoria, le applicazioni alla cosmologia, senza trascurare le recenti applicazioni tecniche alla navigazione e alla localizzazione via satellite: GPS).