Ottavio Serra

Pi greco è dappertutto

Premessa.

Forse il numero più noto di tutta la matematica è π. Non si sa chi per primo usò questa lettera per denotare il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e il diametro, ma che π indichi quel rapporto è risaputo da ogni persona colta. Non tutti sanno però che il suo valore numerico approssimato 3,14 , calcolato per la prima volta da Archimede con un algoritmo divenuto famoso, dipende dalla metrica che vogliamo introdurre nello spazio (nel piano) euclideo. Si ottiene quel valore numerico, se la metrica è quella detta appunto euclidea, che sarebbe più corretto chiamare pitagorica, cioè se la distanza di due punti si calcola applicando il teorema di Pitagora:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Ciò significa che la distanza è subordinata a una norma indotta da un prodotto scalare [1]

Se invece la distanza di due punti è subordinata a una norma non indotta da un prodotto scalare, il rapporto tra circonferenza e diametro è molto più prosaico. Per esempio, in norma $\| \ \|_1$,. così come in norma cosiddetta infinita o norma dell'estremo superiore (nel caso di spazi di dimensione finita, norma del massimo) $\| \ \|_\infty$, quel rapporto vale 4.

Ma l'importanza di π va ben oltre il caso del rapporto tra circonferenza e diametro. Esso è legato all'altro famoso numero detto costante di Nepero o di Eulero, il numero *e*, dalla famosa relazione scoperta da Eulero: $e^{i\pi} = -1$, essendo i l'unità immaginaria. Il motivo è che nel campo complesso la funzione esponenziale è periodica come le funzioni goniometriche seno e coseno.

Un delizioso articolo sulle tre costanti *e, i, π* è dovuto alla penna del grande matematico Bruno de Finetti sul N° 39 della rivista *Le Scienze*, novembre 1971.

Il numero π compare inoltre in svariate formule aritmetiche, dove sembra comparire come un coniglio dal cappello di un prestigiatore, e di alcune di esse mi occuperò nelle righe seguenti, sviluppando in serie di Fourier alcune semplici funzioni periodiche.

Serie di Fourier di x^2

La funzione x^2 non è periodica, ma noi la periodicizziamo traslando sull'asse reale la sua restrizione f(x) all'intervallo [-π , π]. Siccome si tratta di una funzione pari, nel suo sviluppo in serie di Fourier compaiono solo coseni:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

con $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$, (valor medio di f(x) su un periodo) e

$$a_k = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}(\left[x^2 \frac{sen(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{sen(kx)}{k}dx)$$

[1] Vedi O. Serra "Spazi lineari e metriche" in Annuario dello Scorza N°3 1990-91

$$= -\frac{4}{\pi k}\left(\left[x\frac{-\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos(kx)dx\right) = \frac{-4}{\pi k^2}(-\pi\cos(k\pi)) = \frac{4(-1)^k}{k^2}$$

e infine

(1) $$x^2{}_{[-\pi,\pi]} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos(kx)$$

(2) Per x=π, $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$,

(3) analogamente, per x=0, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

(4) Sommando la (2) e la (3) si ottiene $\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$,

(5) mentre sottraendo la (3) dalla (2) si ha $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{24}$.

(6) Infine, per x=π/2, si ottiene $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{48}$.

Nulla di nuovo si ottiene periodicizzando x^2 tra 0 e 2π. Verificare che risulta

$$x^2{}_{[0,2\pi]} = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^2}\cos kx - \frac{\pi}{k}\, sen\, kx\right).$$

Che succede per x=0? E per x=π?

Per $x = \frac{\pi}{2}$, tenendo conto della (6), si ottiene $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} ... = \frac{\pi}{4}$, risultato già noto a Leibniz per altra via.

Serie di Fourier di x^4

Periodicizzando tra -π e π si ottiene, con qualche calcolo in più rispetto a x^2,

(7) $$x^4{}_{[-\pi,\pi]} = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{8\pi^2}{k^2} - \frac{48}{k^4}\right).(-1)^k\cos kx.$$

Per x =π si ottiene, tenuto conto della (2),

(8) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Per x =0 si ottiene, tenuto conto della (3),

(9) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^4}=\frac{7}{720}\pi^4.$$

Analogamente, per $x=\frac{\pi}{2}$, si ottiene

(10) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)^4}=\frac{7}{11520}\pi^4.$$

Lo sviluppo di x^6 è più laborioso. Si ottiene:

$$x^6{}_{[-\pi,\pi]}=\frac{\pi^6}{7}-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(12\pi^4\frac{1}{k^2}-240\pi^2\frac{1}{k^4}+1440\frac{1}{k^6})\cos kx.$$

Da essa si ricava, per x =π,

(11) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6}=\frac{\pi^6}{945}.$$

Con calcoli analoghi si trova:

(12) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^8}=\frac{\pi^8}{9450}$$ e

13) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{10}}=\frac{\pi^{10}}{93555}.$$

Serie dispari

Anche lo sviluppo in serie di Fourier di potenze dispari di x dà risultati interessanti.

F(x)=x.

$$x_{[-\pi,\pi]}=\sum_{k=1}^{\infty}b_k senkx, b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x.senkxdx=\frac{-2(-1)^k}{k}$$ e perciò

(14) $$x_{[-\pi,\pi]} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-(-1)^k}{k} senkx$$

Per x=$\frac{\pi}{2}$ si ottiene il già ricordato risultato di Leibniz:

(15) $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\frac{\pi}{4}.$$

Serie di $f(x) = x^3$

Si trova $$b_k = (\frac{12}{k^3}-\frac{2\pi^2}{k}).(-1)^k$$ e perciò

(16) $$x^3{}_{[-\pi,\pi]} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(\frac{2\pi^2}{k}-\frac{12}{k^3}) senkx.$$

Per x=$\frac{\pi}{2}$, si ottiene:

$$\frac{\pi^3}{8} = 2\pi^2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} - 12\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3}$$

da cui, ricordando la (15), si ricava

(17) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Applicazione a un integrale riguardante il corpo nero.

Dalla legge di Plank sul potere emissivo di un corpo nero:

$$E(\nu,T) = \frac{2\pi}{c^2}\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

segue che il potere emissivo integrale (su tutte le frequenze) è, alla temperatura Kelvin T,

$$E(T) = \frac{2\pi h}{c^2}\int_0^{+\infty}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu$$

Posto hν/kT = x, si ottiene

$$E(T) = \frac{2\pi}{c^2}\frac{k^4T^4}{h^3} J$$

essendo $J = \int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx$ una grandezza adimensionale.

(h costante di Plank, k costante di Boltzman, c velocità della luce).

Risulta

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}x^3}{1-e^{-x}}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^3\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-x})^n\,dx.$$

Siccome la serie è totalmente convergente sulla semiretta reale positiva, si può integrare termine a termine: $J=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}x^3e^{-(n+1)x}dx$ e integrando tre volte per parti:

$$J=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6}{(n+1)^4},$$ ovvero, ricordando la (8), $$J=\frac{\pi^4}{15}.$$

In definitiva,

(18) $$E(T)=\frac{2\pi^5}{15}\frac{k^4}{c^2h^3}T^4.$$

Una misura diretta con un bolometro di E(T) permette di ricavare, misurando anche T (c è nota), il rapporto $\frac{k^4}{h^3}$.

Una misura indipendente di k/h, che si può ottenere dalla legge di Wien, consente di determinare le due fondamentali costanti h e k.

E' importante notare che la funzione E(ν,T) è una funzione *densità*. Ciò implica che, mentre per il calcolo del potere emissivo integrale E(T) è indifferente usare E(ν,t) oppure E(λ,T) , per la legge di Wien, che esprime la relazione tra temperatura e frequenza di massimo potere emissivo, oppure tra temperatura e lunghezza d'onda di massimo potere emissivo, si ottengono risultati diversi a seconda che si utilizzi E(ν,T) oppure E(λ,T).

Ciò dipende dal fatto che, a parità del punto dello spettro λ, equivalente a ν=c/λ, la banda unitaria $\Delta\nu=1Hertz$ è diversa dalla banda unitaria $\Delta\lambda=1A°$ (o un cm, o un metro?).

E' per questo motivo che in termini di frequenza il massimo potere emissivo del Sole (un corpo praticamente nero a 6000° Kelvin) cade nell'infrarosso, mentre in termini di lunghezza d'onda cade a 4800 A°, cioè al centro della banda visibile, dove, (è un caso?) l'occhio ha la massima sensibilità.

Per completezza riporto la formula del potere emissivo in funzione della lunghezza d'onda.

Da ν=c/λ si ricava $d\nu=\frac{-c}{\lambda^2}d\lambda$ e perciò

$$-E(\lambda,T)d\lambda=\frac{2\pi h}{c^2}\frac{c^3}{\lambda^3}\frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1}(-\frac{c}{\lambda^2})d\lambda$$

quindi

$$E(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}-1}}.$$

Annullando la derivata rispetto a λ si ottiene l'equazione

$$5(e^{\alpha}-1)-\alpha e^{\alpha}=0.$$

Risulta α = 4.96 (circa), essendo $\alpha = \frac{hc}{k\lambda T}\cdot$ e quindi

(19) $$\lambda_{(\max)}T = \frac{hc}{k\alpha}.$$

Lavorando in termini di frequenza avremmo ottenuto

(20) $$\frac{T}{\nu_{(\max)}} = \beta\frac{h}{k},$$

dove β=hν/kT è radice dell'equazione $(3-\beta)e^{\beta}-3=0, \beta = 2.82 circa.$[2]

E' ovvio che ricavando h/k dalla (20) si ottiene lo stesso valore di h/k che dalla (19).

Nota didattica

Questo articolo viene pubblicato sulla rivista di un Liceo Scientifico (lo "Scorza" di Cosenza), perciò andrà anche tra le mani di studenti, che magari non hanno le competenze matematiche necessarie per seguire le dimostrazioni degli sviluppi in serie di Fourier introdotti nelle pagine precedenti. Tuttavia potrebbero avere il desiderio di controllare la veridicità della somma delle serie indicate.

Visto che essi studiano elementi di programmazione, sarebbe questa l'occasione per scrivere degli algoritmi per approssimare alcune delle serie suddette. (Il linguaggio di programmazione non importa, va bene uno qualunque, tutto sta a scrivere l'algoritmo). Per chi non è capace di farlo da solo, qui di seguito è riportato il *sorgente* Pascal, per approssimare la somma delle serie dei reciproci dei quadrati, delle quarte potenze e delle seste potenze dei numeri naturali. Con una calcolatrice si può poi controllare se i risultati riportati nell'articolo sono corretti. Sulla falsariga di questo, si potrebbe scrivere l'algoritmo per la serie dei termini pari, o dispari, o a segni alterni, magari lavorando in equipe.

```
Program Serie; {Serie(1/n^2) e varianti}
 const eps=1e-14;
type reale=extended;intero=Longint;
 var n:intero;s2,s4,s6,p,t:reale;
 BEGIN ;n:=1;s2:=1.0;s4:=1;s6:=1;
   repeat ;n:=n+1;p:=n;p:=p*n;p:=p*p;p:=p*n*n;t:=1/p;s6:=s6+t
   until abs(t)<eps;writeln('s6=',s6:0:6,'   n=',n-1);
   n:=1;repeat n:=n+1;p:=n;p:=p*n;p:=p*p;t:=1/p;s4:=s4+t
   until abs(t)<eps;writeln('s4=',s4:0:6,'   n=',n-1);
   n:=1;repeat n:=n+1;p:=n;p:=p*p;t:=1/p;s2:=s2+t
   until abs(t)<eps;writeln('s2=',s2:0:6,'   n=',n-1); READLN
 END.
```

[2] Gilberto Bernardini, Fisica Sperimentale parte I.