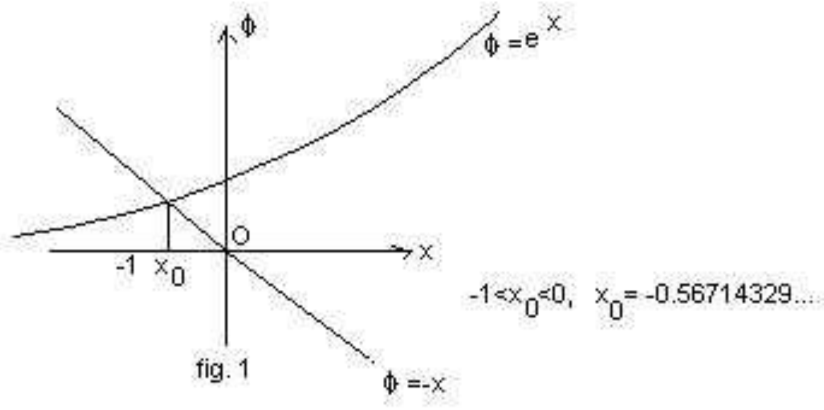
Una bella equazione

Nel campo reale l'equazione

$$e^x + x = 0$$

ha una sola soluzione, come si evince dalla sottostante fig. 1.



(Il valore numerico della soluzione è stato ottenuto con un mio programma che utilizza il metodo di Newton).
E' interessante notare che tale soluzione può essere ottenuta per iterazione su una semplice calcolatrice tascabile, riscrivendo l'equazione nella forma

$$-e^x = x\,,$$

dalla quale si vede che la soluzione è trovata come punto fisso della funzione $-e^x$.
Ciò è possibile perché questa funzione in un intorno del punto fisso è sub lineare, cioè la sua derivata in modulo è minore di 1. Inizializzando x con un valore arbitrario compreso tra 0 e 1, occorrono da 30 a 33 iterazioni per avere la soluzione con 8 cifre decimali.

Ben diverso è il caso nel campo complesso. L'equazione $e^z + z = 0$, vedremo tra poco, ha infinite soluzioni complesse coniugate, oltre beninteso a quella reale, unica, già trovata.
Posto z=x+iy, l'equazione è equivalente al seguente sistema:

[1] $$e^x \cos y + x = 0, e^x \sin y + y = 0.$$

Non può essere y =nπ, con n≠0, perché dalla seconda equazione del sistema [1] si otterrebbe nπ=0; né y=π/2+nπ, perché in tal caso la prima equazione fornirebbe x=0 e perciò la seconda darebbe luogo a una contraddizione: 1+2nπ+π/2=0 oppure -1+(2n+1)π+π/2=0.
Deve essere pertanto y≠nπ/2.
Dividendo membro a membro le equazioni del sistema [1], questo si scrive:

[2]

$$\begin{cases} x = \dfrac{y}{\tan(y)} \\ e^{\frac{y}{\tan(y)}} Sen(y) + y = 0 \end{cases}$$

Si noti che la seconda equazione del sistema [2] è invariante rispetto allo scambio di y con -y, perciò, se si annulla per un certo valore di y, si annulla anche per il valore opposto. Basta pertanto studiare la seconda equazione del sistema [2] per y>0. (Vedi la sottostante fig. 2)

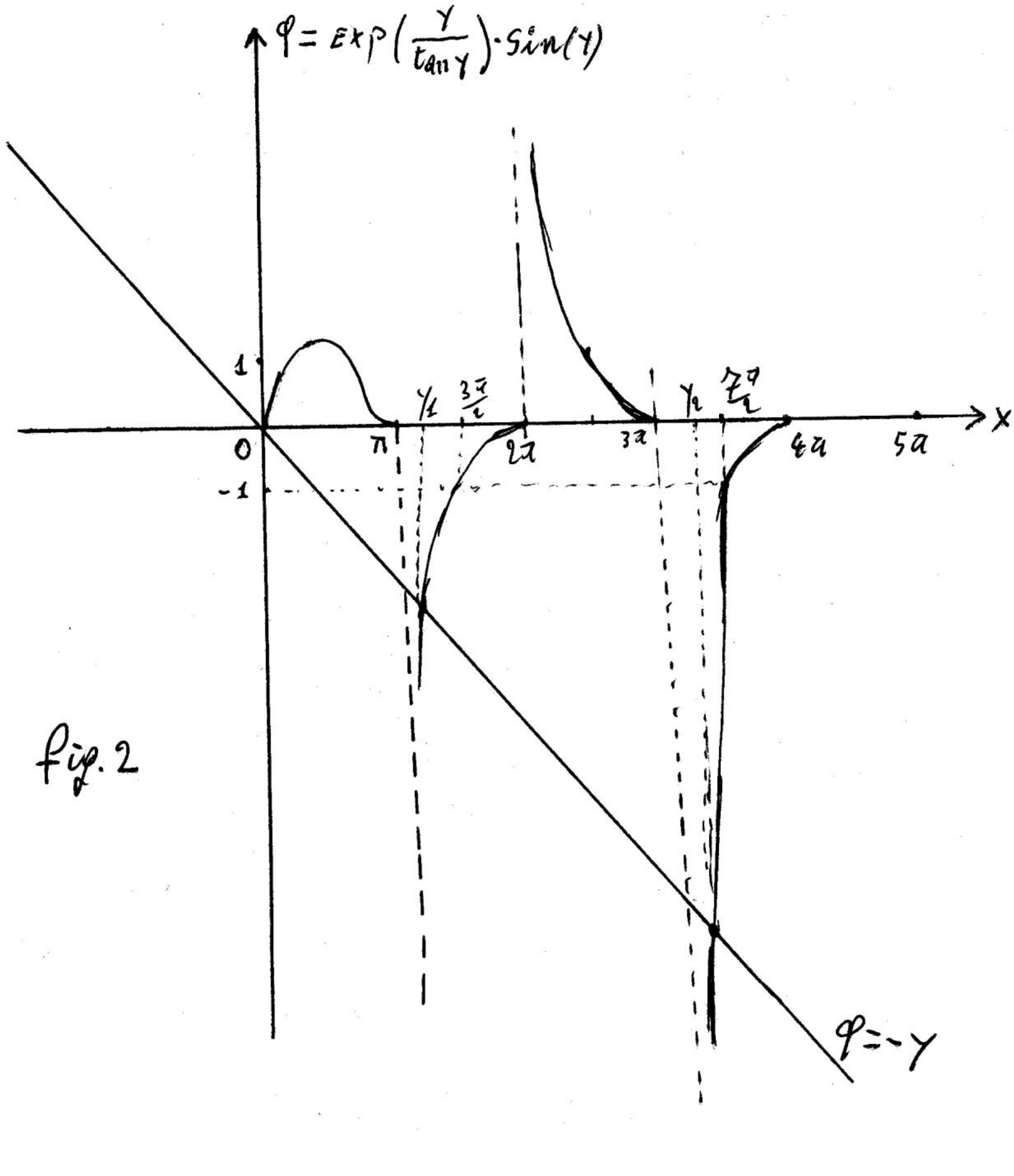


fig. 2

La ricerca delle soluzioni della seconda equazione del sistema [2] è ricondotta pertanto alla ricerca delle intersezioni della retta di equazione **ϕ(y)=-y** e della curva di equazione

$$\phi(y) = e^{\frac{y}{\tan y}} \sin y \, .$$

Si vede che le soluzioni cadono nei seguenti intervalli:

$$y_1 \in]\pi, \frac{3}{2}\pi[, y_2 \in]3\pi, \frac{7}{2}\pi[, ...y_n \in](2n-1)\pi, (2n-1)\pi + \frac{\pi}{2}[....$$

Siccome y_n cade, a meno di multipli di 2π, nell'intervallo $]\pi, \frac{3}{2}\pi[$, $\tan y_n > 0$ e di conseguenza $x_n = \dfrac{y_n}{\tan y_n} > 0.$

Perciò l'equazione $e^z + z = 0$ ammette un'infinità numerabile di soluzioni complesse coniugate $z_n = x_n \pm iy_n,$ con $x_n > 0.$

(L'unica soluzione reale è negativa, come trovata all'inizio).

Calcolando con un programma numerico le soluzioni della seconda equazione del sistema [2], si trova

$y_1 = 4.375185153$ e di conseguenza $x_1 = 1.53391332$, da cui

$$z_1 = 1.53391332 \pm i4.375185153$$

e analogamente $z_2 = 2.40158506 \pm i10.776299516$,

$$z_3 = 2.853581745 \pm i17.11353554,$$

$$z_4 = 3.16295283 \pm i23.42774750,$$

e così via. Va notato però che l'equazione (la seconda del sistema [2]) è sempre più instabile al crescere di n, perché y_n si avvicina sempre di più a (2n-1)π+π/2, come si evince dalla fig. 2.

E' conveniente perciò approssimare direttamente le soluzioni del sistema [1] di due equazioni (non lineari) in due incognite, perché qui non compare il termine $y/\tan y$, che produce instabilità.

Io ho adoperato un mio programma che si basa sul metodo di Newton per un sistema di due equazioni in due incognite. Ho ritrovato naturalmente i precedenti quattro valori di z, nonché i seguenti:

$$z_5 = 3.39869220 \pm i29.73131071$$

$$z_6 = 3.58926252 \pm i36.02902170$$

$$z_7 = 3.74924254 \pm i42.32314536$$

$$z_8 = 3.88711645 \pm i48.61489856$$

$$z_9 = 4.00826205 \pm i54.90499712$$

$$z_{10} = 4.11630466 \pm i61.19389133$$

$$z_{11} = 4.21380491 \pm i67.48187952$$

$$z_{12} = 4.30263892 \pm i73.76916766.$$

Qui mi fermo, tanto in pochi secondi si possono calcolare quante si vogliano soluzioni.

A proposito di soluzioni complesse coniugate.

Il fatto che l'equazione $e^z + z = 0$ ammetta coppie di soluzioni complesse coniugate, analogamente a quanto accade per equazioni algebriche a coefficienti reali, non deve far credere che nel campo complesso un'equazione abbia sempre soluzioni complesse coniugate. Come contro-esempio considero l'equazione

$$e^z + iz = 0.$$

Essa ha tra le soluzioni $z = -0.37469902 + i0.57641272$, ma non la coniugata. Come mai? Posto al solito z=x+iy, l'equazione proposta si scrive

$$e^x(\cos y + i \sin y) + ix - y = 0 \,,$$

equivalente al seguente sistema reale

$$e^x \cos y - y = 0$$

$$e^x \sin y + x = 0$$

e queste equazioni non sono invarianti rispetto allo scambio $y \to -y$.

A proposito di metodi iterativi e punti fissi stabili.

Come esempio di funzioni dotate di punti fissi, considero log x + 2.
Trovare i punti fissi di questa funzione equivale a trovare le soluzioni dell'equazione

$$\log x + 2 - x = 0.$$

Si riconosce facilmente che la funzione ha due punti fissi, a compreso tra 0 e 1, b compreso tra 3 e 4. Ma mentre b è un punto fisso stabile, è, come si dice, un attrattore, e può essere approssimato con 8 o 9 cifre decimali con una ventina di iterazioni, con punto di inizio compreso tra 3 e 4 , ma anche scelto altrove (purché log x + 2 si mantenga positivo), a non può essere calcolato per iterazione, a meno che non si prenda un punto di inizio estremamente prossimo ad a, il ché significa conoscere già il valore di a con 8 o 9 cifre decimali. Ciò accade perché la funzione log x + 2 tra 3 e 4 è sub lineare, mentre non lo è nell'intervallo]0 , 1[in cui cade a. Questo è per la funzione data un punto fisso repulsivo.
Si riportano i valori di a e di b calcolati col metodo di Newton:
a = 0.1585943396, b = 3.1461932206.

Lo studio dell'equazione trattata in questa nota mi è stato proposto dall'amico Franco Violentano, che qui voglio ringraziare per i numerosi e stimolanti quesiti che spesso mi sottopone.

Ottavio Serra

.