Ottavio Serra

Considerazioni sull'insegnamento della geometria
(e sull'uso di tecnologie informatiche).

Premessa

La geometria è considerata dai tempi di Euclide la branca della matematica nella quale l'esigenza del rigore deduttivo si presenta predominante rispetto ad altri fattori pure importanti e addirittura essenziali per ogni disciplina, quali quello della congettura e quello dell'intuizione.

L'entusiasmo dei greci per la sintesi euclidea fece passare in secondo piano il valore della scoperta congetturata e giustificata con considerazioni intuitive o analogiche, tanto che anche il grande Archimede, che pure non disdegnava i *metodi meccanici* dallo stesso portati a somma raffinatezza, non riteneva valida una scoperta se non dopo aver trovato una dimostrazione rigorosa secondo il metodo di *esaustione* di Eudosso di Cnido. E a proposito della formula del volume del cono, dopo aver ricordato che questa fu data per la prima volta da Democrito, attribuisce il merito della formula ad Eudosso, che ne diede una dimostrazione rigorosa.

Il fascino della geometria, scienza del rigore e della certezza, si conserva inalterato nei secoli, attraverso l'opera dei commentatori di Euclide, che si adoperano per migliorarne la purezza logica, e in particolare di sistemare su basi più rigorose la teoria delle parallele, fino a Saccheri e al suo *Euclides ab omni naevo vindicatus*.

Il metodo geometrico fu preso a modello di ragionamento rigoroso e incontrovertibile anche in altri domini del sapere, dal *more geometrico* di Spinoza al *calculemus* di Leibniz.

La scoperta delle geometrie non euclidee ebbe una ripercussione immensa sulla ricerca matematica e condusse gradualmente a un mutamento profondo nelle concezioni di fondo di questa disciplina: non esiste la geometria come scienza di verità, ma la geometria come scienza di sistemi assiomatici non contraddittori; i postulati non sono più fondati sulla certezza dell'evidenza, ma sulla garanzia della coerenza logica. Il problema cruciale diventa con Hilbert quello della dimostrazione di coerenza. Anche se il programma di Hilbert nella sua interezza si è rivelato insostenibile alla luce dei teoremi limitativi di Godel e di Church, ha dato frutti estremamente fecondi sia per quanto concerne la teoria dei modelli [1], sia per gli sviluppi della teoria degli spazi vettoriali, che è diventato lo strumento matematico della meccanica quantistica[2] e i cui primi elementi possono essere introdotti con profitto nell'insegnamento del triennio di Liceo scientifico.

Geometria *intuitiva* e geometria *razionale.*

Nel passaggio dalla scuola media alla scuola secondaria spesso si assisteva nel passato non tanto remoto a una completa cesura tra le nozioni geometriche acquisite per via intuitiva e operativa e una presentazione immediatamente di tipo assiomatico, con frequenti manifestazioni di crisi di rigetto provocate da un vuoto astrattismo, cioè non sostenuto da una obiettiva necessità, sul piano psicologico e didattico, di ricorrere a una deduzione sistematica per ricavare asserzioni riposte dai postulati introdotti. Il disagio psicologico è ancora più grave se si utilizza un bagaglio pesante di assiomi, alcuni magari niente affatto *evidenti*, per ottenere teoremi che l'alunno ritiene del tutto ovvi sulla base della sua esperienza geometrica precedente.

Questo in gran parte è dovuto alla mancanza di distinzione tra proprietà affini e metriche che risale alla tradizione euclidea e alla presentazione prematura di concetti intrinsecamente difficili come quello di angolo in un modo falsamente rigoroso [3].

---

[1] Giorgio Israel, La visione matematica della realtà, Laterza 1997
Giovanni Prodi, Metodi matematici e statistici, Mc Graw-Hill 1992

[2] Guido Fano, Metodi matematici della meccanica quantistica, Zanichelli 1967
Idem, Algebra lineare e serie di funzioni ortonormali, Zanichelli 1976

[3] Gustave Choquet, L'insegnamento della geometria, Feltrinelli 1969

Il peso della tradizione ha tra l'altro privilegiato lo studio iniziale dei triangoli e dei criteri di congruenza e, pur apparendo manifesto che un triangolo è la metà di un parallelogrammo, non si è vista l'importanza del parallelogrammo come oggetto primario e così è rimasto nascosto per lungo tempo il concetto di traslazione, quello di vettore e la linearità del piano e dello spazio [4].

A mio giudizio occorre valorizzare appieno i concetti e le abilità geometriche acquisite nella scuola media, programmando un lavoro preliminare di attività finalizzate all'affinamento delle capacità critico – intuitive e osservative [5], lavorando anche su modelli non standard (se chiamo punti e rette le tali e tal'altre cose, quali proprietà già assodate cadono in difetto e quali permangono), abituando i giovani a fare congetture su presumibili proprietà e facendo così nascere in modo naturale l'esigenza di sistemare le conoscenze acquisite.

Solo in seguito si può introdurre un sistema di assiomi, enunciare senza dimostrazione teoremi non significativi ma necessari per il seguito e dimostrare solo quelli che alla mente dello studente non appaiono evidenti. Non è necessario infatti dimostrare tutto, ma dare il senso di che cosa voglia dire *dimostrare* [6].

Una volta motivato un sufficiente numero di proprietà, si può presentare un sistema di assiomi, preferibilmente *piccolo*, e mostrare come da essi si possano derivare teoremi, alcuni niente affatto immediati. Si può adattare la metodologia di Choquet (nota 3), introducendo dapprima gli assiomi di incidenza e di ordine e successivamente gli assiomi di struttura affine, facendo uso del campo dei numeri reali che può essere introdotto contestualmente come sistemazione (non rigorosa) delle nozioni apprese nella scuola media sulle frazioni e sulle radici, come propone pure Dieudonné (nota 6) anche se in un diverso contesto metodologico, e in tal modo introdurre il gruppo delle traslazioni, la struttura vettoriale del piano e il gruppo delle dilatazioni; oppure adattare al livello di astrazione ammissibile in un biennio l'impostazione di Artin [7].

La struttura vettoriale del piano induce naturalmente un sistema di riferimento cartesiano e porta agevolmente all'equazione della retta e alla risoluzione di problemi di incidenza e di parallelismo. La rappresentazione grafica permetterà di interpretare con linguaggio geometrico problemi che si traducono in equazioni e sistemi di equazioni lineari, facendo vedere come algebra e geometria siano intimamente connesse e come l'una possa gettare luce sui problemi e sui concetti dell'altra. Si andrà così sviluppando l'abitudine a pensare in termini di modelli geometrici in algebra e in seguito nell'analisi, come in fisica, biologia, economia e ciò consentirà spesso di cogliere proprietà riposte che altrimenti sarebbe ben più arduo rilevare.[8]

Introdotte poi le nozioni metriche di distanza e di perpendicolarità, si studierà nel 2° anno del biennio il gruppo delle isometrie e quello delle similitudini. Se è stata già studiata la parabola come grafico di una funzione, si può ritrovarne le proprietà come luogo di punti equidistanti da una retta e da un punto e associarne lo studio a quello del cerchio.

Si badi che il problema della tangente a una curva ***non*** coinvolge nozioni metriche, e se la tangente al cerchio è ricca di proprietà metriche, è bene che queste affiorino *dopo e non prima* aver introdotto la metrica nel piano.

E' vero che Euclide mostra subito le proprietà metriche della tangente al cerchio, dopo aver definito la tangente come la retta che ha in comune col cerchio un solo punto (sic), ma se ciò non provoca guai finché ci si limita a curve ovunque convesse, come per esempio le coniche, le cose si complicano specialmente sul piano psicologico appena si voglia parlare di tangente a curve più generali, anche se ancora di tipo semplice come grafici di funzioni polinomiali. Vedi per esempio [9], anche per un recupero della *regola* di Ruffini.

---

[4] Luigi Campedelli, La geometria dei parallelogrammi, Le Monnier 1970
[5] Bruno de Finetti, Il "saper vedere" in matematica, Loescher 1967
[6] Jean Dieudonné, Algebra lineare e geometria elementare, Feltrinelli 1970
[7] Emil Artin, Algebra geometrica, Feltrinelli 1968
[8] Valeriano Comincioli, Metodi numerici e statistici per le scienze applicate, Editrice Ambrosiana 1996
Vedi anche G. Prodi, nota 1
[9] Ottavio Serra, Funzioni polinomiali e tangenti, 6° annuario Liceo Scientifico Scorza, 1993/94

Vorrei sottolineare che non tutto ciò di cui si sta discorrendo debba essere studiato nel biennio, ma se biennio e triennio non sono visti come mondi separati, una programmazione *verticale* può essere fruttuosamente posta in essere.

Lo studio delle trasformazioni geometriche (del piano nel biennio, dello spazio nel triennio) porta nel modo più naturale all'osservazione di proprietà invarianti e all'acquisizione delle sottostanti strutture di gruppo; questo fondamentale concetto unificante viene così acquisito in tanti contesti diversi e, per così dire, concreti; in particolare acquisterà significato la considerazione di gruppi non abeliani che, fuori del contesto geometrico, non possono non apparire costruzioni artificiose fine a se stesse.

Infine vorrei ricordare un esempio famoso, la determinazione di Pi Greco col metodo archimedeo dei poligoni regolari; l'implementazione del corrispondente algoritmo fa toccare con mano la differenza tra formule stabili e formule instabili e mostra in modo naturale l'utilità delle manipolazioni algebriche per contenere la propagazione degli errori.

Un altro esempio in cui la geometria illumina tecniche e concetti i più disparati è quello dell'approssimazione dello zero di una funzione (inizialmente polinomiale) in un intervallo ai cui estremi la funzione cambia segno. Ciò richiede l'introduzione di un assioma di continuità, magari *debole*, come propone Dieudonné (vedi nota 6), in modo da garantire la convergenza del processo iterativo di approssimazioni razionali. Ciò potrebbe, tra l'altro, essere ripreso alla fine del triennio per introdurre i numeri reali come successioni di Cauchy di numeri razionali.

Ancora, poche nozioni di geometria (metrica) elementare sono sufficienti per introdurre le funzioni goniometriche e le formule di duplicazione e bisezione; ciò basta per scrivere algoritmi per il calcolo di seno, coseno, arcoseno, senza ricorrere ai polinomi di Taylor, come ho proposto nel mio articolo *Trigonometria nel biennio* [10], anche se, col senno di poi, devo ammettere che l'argomento non può essere affrontato prima del triennio.

La geometria nel triennio

Lo studio della geometria nel triennio dovrebbe consistere in una trattazione più sistematica delle proprietà vettoriali, affini e metriche dello spazio euclideo, utilizzando il linguaggio e i metodi dell'algebra lineare, integrando però la teoria assiomatica con un costante ricorso all'intuizione spaziale : insomma una trattazione che evidenzi la linearità dello spazio fisico nel quale viviamo, ma senza vantarsi di fare a meno delle figure (vedi Dieudonné, nota 6).

Questo approccio consente di recuperare lo studio dello spazio (tridimensionale euclideo), che nella pratica dell'insegnamento è fortemente mortificato, anche perché l'impostazione tradizionale richiede un impegno e un tempo che non sembrano adeguatamente ripagati dai risultati ottenibili. Né si capisce perché usare metodi che richiedono o un pesante bagaglio assiomatico (volendo essere rigorosi) o un ricorso a pseudo dimostrazioni basate su taciti postulati o su proprietà così dette *evidenti*. Come ho detto all'inizio, la cosa importante non è dimostrare tutto, ma mostrare all'opera un sistema di postulati forti per ricavarne in modo formale alcune proprietà non evidenti. A mio parere, non c'è nulla di più frustrante che sottoporre i ragazzi a un grande sforzo per ottenere risultati che essi ritengono ovvi.

I metodi dell'algebra lineare consentono di costruire gli oggetti della geometria con rapidità ed eleganza; in più, svincolandoci dalla limitazione delle tre dimensioni, ci permettono di ottenere attraverso modelli geometrici risultati altrimenti fuori della portata di uno studio liceale, come per esempio la retta di regressione, più in generale il polinomio di regressione, interpretando le n-ple di dati come vettori di uno spazio n-dimensionale [11].

Ciò non toglie però che si debba e si possa utilizzare la via sintetica, alla maniera di Euclide, in alternativa non esclusiva al metodo analitico, tutte le volte che la via sintetica conduce velocemente

[10] Ottavio Serra, Trigonometria nel biennio, 2° annuario Liceo Scientifico Scorza 1989/90

[11] Alunni della quarta A, Vettori e trasformazioni lineari, 5° annuario Liceo Scientifico Scorza 1992/93

allo scopo. Un esempio: *il segmento di tangente compreso tra il punto di contatto e la direttrice è visto dal fuoco sotto angolo retto. Quali conoscenze si presuppongono?*

La trigonometria diventa un paragrafo dello studio del piano metrico euclideo($\mathbf{R}^2$ munito di prodotto scalare) e si ottengono in poche pagine tutte le proprietà che possono servire per gli ulteriori studi di matematica e per le applicazioni alla fisica dei fenomeni ondulatori.

Questo modo di affrontare la geometria consente anche di lasciare sufficiente tempo disponibile per una riflessione critica di sintesi sui problemi e i metodi della geometria, sul significato e il valore di modelli euclidei di geometrie non euclidee, sul problema generale della rappresentazione di una teoria in un'altra e sulle dimostrazioni di non contraddittorietà relativa, sull'importanza storica che il pensiero geometrico, e in particolare la teoria delle parallele, ha avuto per il progresso di tutti i rami della matematica, tanto che anche chi pensa che *la geometria sia morta come scienza autonoma e viva*, le riconosce il ruolo di universale e suggestivo linguaggio in tutti i campi della matematica[12].

Geometria e calcolatore

L'introduzione dell'informatica nel piano di studi della matematica nel biennio e nel triennio può dare un valido aiuto alla visualizzazione delle proprietà geometriche e in particolare delle proprietà invarianti rispetto a un gruppo di trasformazioni. La possibilità di seguire *in tempo reale* la deformazione di una figura rende più facile, per contrasto, individuare ciò che non cambia. Ciò vale ovviamente anche per le proprietà di un luogo di punti; per esempio, le distanze di un punto di una ellisse da un fuoco e dalla corrispondente direttrice cambiano al cambiare del punto, ma il rapporto, l'eccentricità no. Questa osservazione può suggerire un approccio unitario allo studio delle coniche, partendo da Apollonio e poi, seguendo Hilbert [13], ricavare intuitivamente (?) alcune proprietà riposte di queste curve, nonché seguire il graduale passaggio dall'ellisse alla parabola.

Intanto, due considerazioni. In primo luogo, non è assolutamente in contrasto con quanto sostenuto finora fare di tanto in tanto un *tuffo* nell'intuizione, come suggerisce addirittura Hilbert, *padre del formalismo*, col titolo niente affatto casuale dell'opera citata e come ci ricorda anche de Finetti (nota 5). Lo studio della geometria e in generale di qualunque ramo del sapere non deve trincerarsi dietro un malinteso principio di *purezza del metodo*, ma saper alternare il momento del *saper vedere* al momento formale deduttivo. In secondo luogo, questo approccio è oggi fortemente motivato dall'esistenza di un software grafico facile da usare e flessibile nella realizzazione, come è, per esempio, **Cabri.** Anche se con qualche limitazione, questo programma è abbastanza affidabile e veloce, a patto di non pretendere animazioni eccessivamente complesse; se usato con intelligenza e misura, può dare un valido aiuto alla assimilazione dei concetti. L'essenziale è non farsi prendere la mano dallo strumento e confondere inconsapevolmente il mezzo con il fine, col rischio che si confondano *i segmenti con i bastoncini* [14] . E' chiaro che dopo il momento visivo, importantissimo, si badi, non è un caso che la corteccia neo-corticale dell'uomo è essenzialmente un potentissimo costruttore di spazialità, probabilmente decisivo per la supremazia di Homo sapiens nella biosfera, è necessario il momento della dimostrazione ipotetico – deduttiva, dell'astrazione, che è l'altro polo sul quale poggia la potenza della mente umana.

E' anche chiaro che l'introduzione dell'informatica nella scuola non può ridursi all'uso di software preconfezionato, per quanto affidabile, efficace e *di bella presenza*; occorre anche acquistare l'abilità di usare un linguaggio di programmazione per implementare algoritmi, magari semplici, ma dei quali si padroneggia ogni passo. Come fa Cabri a disegnare un cerchio e magari le tangenti ad esso? Saprei farlo anch'io? Magari meglio? Questa è una cattiveria: da un software *all purpose* non

---

[12] Nicolas Bourbaki, Elementi di storia della matematica, Feltrinelli 1963
[13] David Hilbert e Stefan Cohn-Vossen, Geometria intuitiva, Boringhieri 1972
[14] Lucio Russo, Segmenti e bastoncini Dove sta andando la scuola? , Feltrinelli 1998

si può pretendere la perfezione in ogni dettaglio. Va riconosciuto però ai creatori di Cabri il merito di aver realizzato un software veramente efficace e utile per favorire un equilibrato rapporto dialettico tra concretezza e astrazione geometrica; la sfida alla costruibilità aguzza l'ingegno e, facendo balenare delle proprietà inaspettate, stimola il desiderio di dimostrarle.

Non vedo invece favorevolmente l'uso sistematico di software dedicato ad argomenti specifici; al più, se veramente ben fatto, mostrarne qualcuno, preferibilmente nel biennio e magari che dia la possibilità di auto_esercitazione e auto_valutazione. Man mano che si procede negli studi va dato sempre più spazio alla realizzazione di algoritmi (di natura geometrica nel caso specifico della geometria), che rappresentano il momento veramente creativo e che giustificano l'introduzione dell'informatica nel corpo dell'insegnamento matematico. E' per questo motivo che ritengo più formativo l'uso di un linguaggio di programmazione che, come il *Pascal*, consentono un completo dominio delle strutture informative e una rigorosa *località* delle variabili. L'uso di linguaggi che non esibiscono l'obbligatorietà della dichiarazione delle variabili, che non permettono all'utente di definire nuovi tipi, che viceversa si pavoneggiano con estese strutture preconfezionate, come *Visual Basic*, saranno validi strumenti per chi si occupa di progettazione di moduli, ma hanno scarsa valenza didattica e non si prestano ad un insegnamento che miri alla comprensione critica dei problemi e dei metodi dell'informatica.

Nelle pagine seguenti proporrò alcune indicazioni didattiche relative alle coniche, nello spirito della *geometria intuitiva* di Hilbert ; mostrerò anche delle costruzioni realizzate con *Cabri,*che suggeriscono interessanti proprietà geometriche.

ELLISSE

La definizione di ellisse, PF + PF' =K costante, garantisce che la curva è simmetrica rispetto all'asse focale, al centro O punto medio di FF' e alla perpendicolare per O ad FF'. Assunte tali rette come assi cartesiani, l'equazione dovrà essere del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Posto F=(c,0), F'=(-c,0),A=(a,0), A'=(-a,0), B=(0,b), B'=(0,-b),
sarà c<a (2c<2a perché in un triangolo un lato è minore…).
AF+AF'= k equivale a : (a - c)+(a + c) = k, cioè k = 2a.
Dunque k = 2a è la lunghezza dell'asse focale.
Analogamente, BF+BF' = K =2a, implica

$$2\sqrt{c^2+b^2}=2a$$

E quindi

$$b=\sqrt{a^2-c^2}$$

IPERBOLE

Dalla definizione geometrica segue che l'iperbole è simmetrica rispetto all'asse focale FF', che assumeremo come asse x, al loro punto medio O e all'asse y perpendicolare ad x in O.

Pertanto l'equazione dovrà essere del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

essendo la curva illimitata. Sarà c>a (2c>2a perché in triangolo un lato è maggiore della differenza degli altri due).
Detti A(a,0) A'(-a,0) i punti dell'iperbole sull'asse focale, F(c,0), F'(-c,0), P(c,z) , z>0, da AF' – AF =k costante, segue che
(a + c)-(c - a)=k e dunque k=2a;

analogamente, PF'-PF=k=2a, implica

$$\sqrt{(2c)^2 + z^2} - z = 2a$$

$$z = \frac{c^2 - a^2}{a}$$

e perciò

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

La retta r

$$y = \frac{b}{a}x$$

(basta considerare solo il 1° quadrante, per simmetria) dista dall'iperbole sempre meno al crescere di x: **asintoto**. Analogamente, è un asintoto la retta simmetrica di r rispetto all'asse delle x.