Ottavio Serra

IL METODO DEL "*PUNTO DI VISTA SUPERIORE*" IN MATEMATICA

Spesso accade che una questione apparentemente semplice, ma della quale non si scorge la soluzione, si presenta sotto una nuova luce, se inquadrata in un contesto più elevato, nell'ambito del quale si giunge alla soluzione del problema. Accade anche che argomenti che non mostrano connessione alcuna appaiono come aspetti o interpretazioni di un unico modello ad un livello più profondo. E' questo il motivo per cui si incontrano testi dal titolo: *Geometria elementare da un punto di vista superiore* o analoghi. L'esigenza di unificare campi diversi del sapere ha non solo valenza estetica (i Greci esprimevano questa esigenza con l'espressione *salvare i fenomeni*), ma anche capacità predittiva e risolutiva. Si pensi in geometria alla teoria dei gruppi di trasformazione e alla classificazione dei vari capitoli di essa: geometria proiettiva, affine, metrica come insiemi delle proprietà invarianti rispetto a un gruppo; oppure alla teoria della Relatività (ristretta) nella quale le difficoltà e le apparenti contraddizioni fattuali si sciolgono come per magia e in più si rivelano proprietà inaspettate e si aprono nuove vie nella conoscenza, introducendo un punto di vista superiore sui concetti di spazio e di tempo.
In questa breve nota vorrei presentare alcuni esempi tratti dalla teoria degli integrali in cui, introducendo un punto di vista superiore, che a prima vista sembra complicare le cose, si riesce a calcolare in forma *esatta* o, come si dice, in forma *chiusa* l'integrale definito di una funzione integranda che non ammette primitiva elementare.

1° Sia **J** il seguente integrale improprio

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

La primitiva di senx/x non esiste, tuttavia si riesce a calcolare l'integrale improprio **J** introducendo la seguente funzione di un parametro **t (0 < t < +∞)** :

$$F(t) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} e^{-tx} dx$$

Derivando rispetto a t si ottiene:

$$F'(t) = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x.(-e^{-tx})dx$$

e integrando due volte per parti e ricordando inoltre che

$$[-\operatorname{sen} x \frac{e^{-tx}}{t}]_0^{\infty}$$

vale zero, si ricava infine:

$$F'(t) = \frac{-1}{t^2}(1 + F'(t))$$

da cui, integrando

$$F(t) = C - arc\tan(t)$$

Osservando che il limite per t→+∞ di F(t) è zero, risulta finalmente

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - arc\tan(t)$$

Per t→ 0 questa formula conduce al problema iniziale:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Dà però infiniti altri integrali, per esempio, per t=1,

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} e^{-x} dx = \frac{\pi}{4}$$

2° Si voglia calcolare

$$J = \int_0^\infty \cos x . e^{-x^2} dx$$

Si introduca la funzione di t

$$F(t) = \int_0^\infty \cos(tx) . e^{-x^2} dx$$

Derivando rispetto a t, si ottiene

$$F'(t) = \int_0^{\infty} - x\,\mathrm{sen}(tx).e^{-x^2}\,dx$$

e integrando per parti, (**sen(tx)** fattore finito), si ha:

$$F'(t) = -\frac{t}{2}F(t)$$

Integrando questa equazione differenziale, si ottiene

$$F(t) = Ae^{-\frac{t^2}{4}}$$

La costante A si ricava osservando che, per t=0,

$$A = F(0) = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Questa celebre formula è stata ottenuta per la prima volta da Eulero, considerando l'integrale doppio esteso a tutto il piano

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

che è facilmente calcolabile passando a coordinate polari e vale π. Questo è un ulteriore esempio di come, passando a un punto di vista superiore, le cose si semplifichino (a volte).
In definitiva

$$F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{t^2}{4}}$$

E infine

$$\int_0^{\infty} \cos x.e^{-x^2}\,dx = F(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{e}}$$

Al variare di t si ottengono infiniti altri integrali.

Naturalmente, le cose non vanno sempre così bene.

3° Si consideri, ad esempio, l'integrale analogo al precedente

$$J = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x . e^{-x^2} \, dx$$

Viene spontaneo porre, come nell'esempio **2°**,

$$F(t) = \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(tx) . e^{-x^2} \, dx$$

Derivando rispetto a t e integrando per parti si ha:

$$F'(t) = \int_0^{\infty} x \cos(tx) . e^{-x^2} \, dx = [-\frac{1}{2} e^{-x^2} \cos(tx)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-x^2} t \operatorname{sen}(tx) dx$$

Questa volta però l'espressione in parentesi quadra non si annulla, ma vale ½, perciò

$$F'(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{2} F(t)$$

Questa equazione differenziale, un po' più difficile che nell'esempio **2°**, si integra moltiplicando ambo i membri per il *fattore integrante*

$$e^{\frac{t^2}{4}}$$

e si ottiene:

$$F(t) . e^{\frac{t^2}{4}} = \frac{1}{2} \int_0^{t} e^{\frac{z^2}{4}} \, dz + c$$

(**c** vale zero perché, per t=0, F(t)=0).
In particolare, l'integrale **J** si ottiene per t=1:

$$J = F(1) = \int_0^{\infty} \operatorname{sen} x . e^{-x^2} \, dx = \frac{1}{2\sqrt[4]{e}} \int_0^{1} e^{\frac{z^2}{4}} \, dz$$

Questa volta non ci è andata bene come nei casi precedenti, tuttavia siamo riusciti a trasformare un integrale improprio, privo di primitiva elementare, in uno più semplice e più facilmente trattabile con i metodi dell'analisi numerica, perché l'intervallo di integrazione è finito.
Si trova $J = 0.42443638\ldots$