**OTTAVIO SERRA**

# GEOMETRIA PROBABILITA' INFORMATICA

**Relazione tenuta nella Sala consiliare del Comune di Diamante il 7 giugno 2000**
**Nell'ambito del Convegno su *L'insegnamento della matematica:Quale, Perché, Come***
**Organizzato dai Proff. A. Fabiano, M.F. Farina, J. Guenot**
**Del Dipartimento di Matematica, Università della Calabria.**

Il fatto di disporre attualmente di potenti strumenti informatici e multimediali non ci deve far dimenticare che il fine primario dell'insegnamento della matematica è la **MATEMATICA.**

Non c'è dubbio che il possesso di certi strumenti modifichi sia il modo di pensare gli argomenti di matematica, sia il modo di presentarli.

D'altra parte, concetti fondamentali per costruire modelli della realtà esterna (qualunque cosa possa significare ***realtà esterna***), quali i concetti probabilistici e quelli dell'algebra lineare, stentano ad entrare a pieno titolo nell'insegnamento della scuola secondaria, anche per le carenze della preparazione dei docenti, delle quali non è senza colpa l'università.

Presenterò alcuni esempi per chiarire le mie idee, traendo il primo dalla geometria e dal problema del calcolo di $\pi$.

L'esempio permetterà di rivisitare argomenti di geometria elementare fuori dei soliti esercizi di routine sui teoremi di Pitagora e di Euclide.

Consentirà anche di collegarci ai temi di informatica e di sperimentare sul *campo* questioni relative alla propagazione degli errori.

E' noto che basta il solo teorema di Pitagora (l'uso dei teoremi di Euclide snellisce i calcoli) per ottenere il lato del 2n-agono regolare inscritto in un cerchio (di raggio 1), dato il lato dell'n-agono:

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$$

Segue per il lato del 2n-agono circoscritto:

$$L_{2n} = \frac{2l_{2n}}{\sqrt{4 - l_{2n}^2}}$$

Risulterà allora

$$n.l_{2n} < \pi < n.L_{2n}$$

Tuttavia il calcolo è fortemente sensibile alla propagazione degli errori per colpa della formula

$$l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$$

perché, al crescere di n, il lato del n-agono si avvicina pericolosamente a zero, sotto la radice quadrata 2 – *quasi* 2 è *quasi* zero e il calcolo di **π** perde di attendibilità.
Tutto si sistema se la formula del 2n_agono inscritto si scrive:

$$l_{2n} = \frac{l_n}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - l_n^2}}}$$

(Qui far vedere qualche programma, come per esempio, i miei "**PiGreco**" in VisualBasic o "**Archimed**" in Pascal).

**Congettura e confutazione in geometria.**
E' noto che per trasformazione affine del cerchio in ellisse, si giustifica facilmente la formula per l'area dell'ellisse: S(e) =πab,
che generalizza quella del cerchio.
Per analogia, viene in mente di generalizzare la lunghezza della circonferenza in
L(e) = π(a + b).
Che tale formula sia errata si dimostra osservando che, se fosse giusta, dovrebbe valere per ogni b, ma, per b = 0, L(e) = πa, mentre l'ellisse degenera in un segmento 2a contato due volte e quindi L(e) = 4a.

**Speranza matematica:**
**c'è da fidarsi?**
*Certamente, se il calcolo è corretto, ma attenti alle attribuzioni fallaci di probabilità.*
Spesso l'errore dipende da una errata attribuzione di probabilità uniforme, come nel seguente esempio (da Jean Paul Delahaye)
Mi vengono presentate due buste, A e B, contenenti una x $ e l'altra 2x $. Sto per scegliere la busta A, ma poi ragiono così: se A contiene z $ (x o 2x), c'è una probabilità su due che B contenga 2z $ e una su due che contenga z/2 $; la speranza matematica di B è 1/2(2z)+1/2(z/2) = 1.25z, meglio di A la cui speranza è di soli z $.
Ma la situazione è simmetrica per le due buste: *cos'è che non va?*
Intanto, non sono possibili tutti i valori di x; chi propone il gioco fissa un tetto ai suoi valori; inoltre i valori dispari possono comparire solo una volta in A come in B.

Più in generale, occorre sempre fare attenzione a non assegnare implicitamente uguale probabilità a tutti (gli infiniti) numeri interi.
Se per es. 1<=x<=10,  2<=2x<=20, la speranza di chi sceglie la busta A è
(1+3+5+7+9+2(2+4+6+8+10)+12+14+16+28+20)/20=8.25
e lo stesso è per B.

In generale, per un x massimo =n pari, n=2k, la speranza per ciascuna busta è
S=(1+3+..+2k-1+2(2+4+..2k)+2k+2+..4k)/4k=

$$(k^2+2(k^2+k)+3k^2+k)/4k=\frac{3k(2k+1)}{4k}$$

Se n è dispari, n=2k+1,
S=(1+3+..2k+1+2(2+4+..2k)+2k+2+..4k+2)/(4k+2)=
(k(9k+8)+1)/(4k+2).
Citato dallo stesso Autore, *il paradosso di S. Pietroburgo*, attribuito a Daniel Bernouilli.
Anche in questo, tutto ruota sul fatto *trascurato* che il Casinò non ha una disponibilità finanziaria infinita. Ecco il fatto.
Il cliente lancia una moneta e riceve 2 $ se esce testa al 1° lancio, 4 $ se esce per la prima volta testa al 2° lancio, 8 $ se testa esce per la prima volta al 3° lancio, e così via.
La speranza di vincita è infinita e dunque la posta, per un gioco equo, dovrebbe essere infinita; ma anche se il banco mi chiede una posta di 1000 $, io non ci casco, è chiaro!……
Altro esempio: quand'è che comincia a diventare conveniente giocare alla roulette, anziché depositare i soldi in banca?…
Come esempi di calcolo di probabilità vorrei presentare i seguenti, relativi alla probabilità nel continuo, tratti dal libro di Guido Castelnuovo: ***Calcolo delle probabilità*** vol.1°, Zanichelli 1933.

1° Probabilità che un meteorite colpisca la Terra (supposta sferica) al di sopra di un dato parallelo (di colatitudine λ).
Normalizziamo il problema ponendo R=1(raggio terrestre).
L'altezza della calotta limitata dal detto parallelo è h=1-cos(λ)  e perciò la probabilità richiesta è (assunta l'ipotesi di distribuzione uniforme):

$$P=\frac{2\pi(1-\cos\lambda)}{4\pi}=\frac{1-\cos\lambda}{2}=\text{sen}^2(\frac{\lambda}{2})$$

La probabilità che il punto di caduta abbia colatitudine compresa tra λ e λ+dλ  risulterà poi

$$dP'=\frac{1}{2}\text{sen}\,\lambda.d\lambda$$

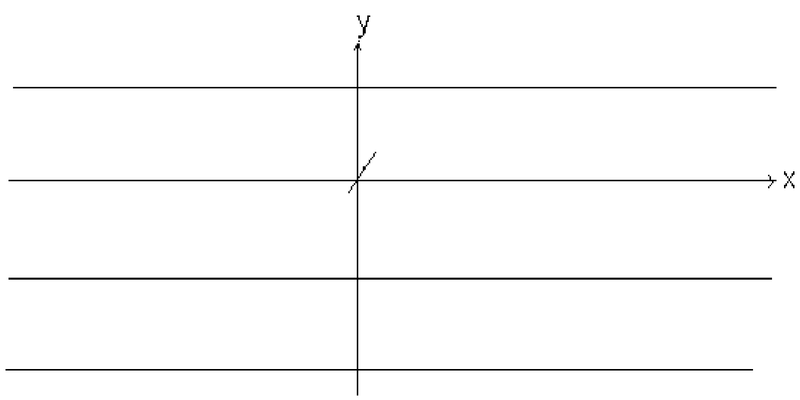
Analogamente, la probabilità che il punto di impatto abbia longitudine compresa tra α e α+dα **è**

$$dP'' = \frac{d\alpha}{2\pi}$$

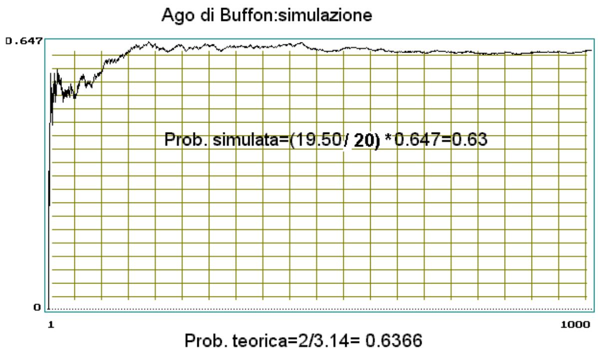
Se si assume che le due probabilità siano indipendenti, avremo

$$dP = dP'.dP'' = \frac{\operatorname{sen}\lambda d\lambda d\alpha}{4\pi}$$

**Problema dell'ago di Buffon.** (Proposto il 1733, la soluzione fu data il 1777)



Su un foglio orizzontale è tracciato un sistema di rette parallele equidistanti (distanza 2a). Viene lanciato sul foglio un ago cilindrico di lunghezza $2l<2a$: qual è la probabilità che l'ago intersechi una retta?
Detta y la distanza del centro dell'ago dalla retta più vicina, $\phi$ l'angolo che l'ago forma con la perpendicolare Y alle rette parallele, y varia tra 0 ed a, mentre $\phi$ tra $-\pi/2$ e $\pi/2$.
Lo spazio degli eventi è il rettangolo di base $\pi$ e altezza a, mentre l'evento è l'insieme dei punti al disotto della cosinusoide
$y=l.\cos(\phi)$.
Integrando questa funzione tra gli estremi $-\pi/2$ e $\pi/2$, e dividendo per l'area del rettangolo $\pi a$, si ottiene la probabilità $P=2l/(\pi a)$.



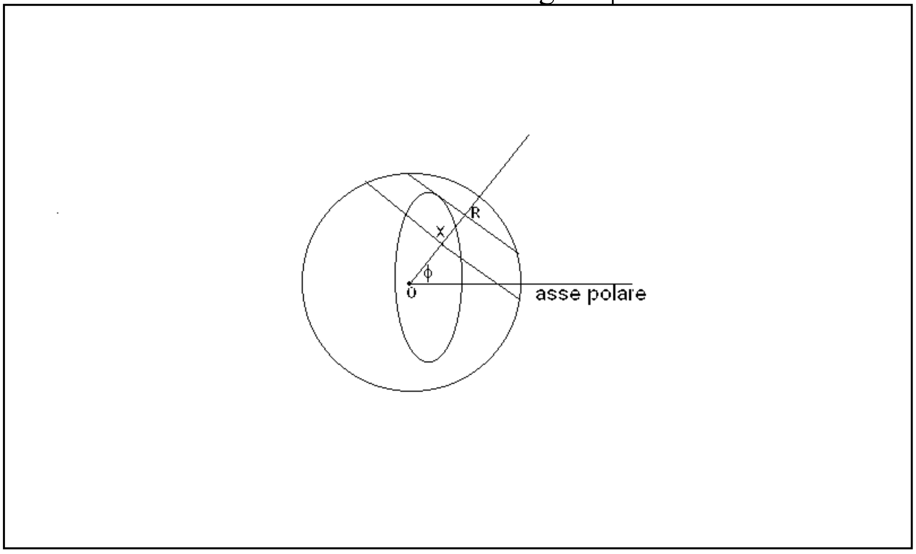

<u>(Vedere il programma il mio programma "**Buffon**</u>")
La comparsa del mitico $\pi$ nel problema dell'ago ha indotto molti ricercatori a realizzare degli esperimenti.

| Data | Autore | l/a | Lanci | Inters | PiGreco |
|---|---|---|---|---|---|
| 1850 | Wolf | 0.8 | 5000 | 2532 | 3.1596 |
| 1855 | Smith | 0.6 | 3204 | 1218.5 | 3.1553 |
| 1860 | De Morgan | 1 | 600 | 382.5 | 3.137 |
| 1864 | Fox | 0.75 | 1030 | 489 | 3.1595 |
| 1901 | Lazzarini | 0.83 | 3408 | 1808 | 3.14159 |
| 1925 | Reina | 0.5419 | 2520 | 859 | 3.1795 |

(da Roger Cuculière: La probabilità geometrica, Le Scienze Quaderni, ottobre 97)
Il trucco c'è e si vede: basta scegliere un buon rapporto l/a e arrestare l'esperimento quando si ottiene una appetibile approssimazione di $\pi$.
Una interessante generalizzazione, dovuta al Barbier (*Journal de mathematiques, 1860*), permette di ottenere senza calcolo integrale la probabilità precedente, nonché di arrivare a un risultato sulla lunghezza di una curva chiusa (convessa) ottenuto da Cauchy nel 1841 indipendentemente dal calcolo delle probabilità.
Se l'ago è diviso in n parti uguali, ciascuna di queste ha la stessa probabilità di incontrare una delle rette parallele. La probabilità è perciò proporzionale alla lunghezza 2l dell'ago.
Nel caso che $2l>2a$, la probabilità va sostituita con la speranza matematica S del numero di intersezioni: $S=c.2l$, essendo c una costante dipendente da a, ma indipendente da l. Se $l<a$ , $S=P$.
La formula $S=c.2l$ vale anche se l'ago è sostituito da spezzata o anche da una poligonale chiusa con un numero arbitrario di lati e al limite da una curva continua.

Nel caso che la curva è un cerchio di diametro 2a, S=2, 2l=2πa e perciò c=1/(πa).
Si ottiene infine S=2l/(πa) e, per l<a, P=S come col calcolo integrale.

Nel caso di una curva chiusa convessa e regolare, se 2a è abbastanza grande in modo da poter escludere gli incontri con più di una parallela, la probabilità di un incontro (e quindi di due) è
S/2 = l/aπ.
Questa probabilità può valutarsi osservando che in un cerchio di raggio a una corda è individuata dalla distanza x = OX dal centro e dall'angolo ϕ che la normale alla corda forma con un asse polare.




dP = dx/a. dϕ/2π e quindi,

essendo r(ϕ) = OR,

$$P = \frac{S}{2} = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{r(\phi)} dx$$

Confrontando con la P = S/2, si ottiene il risultato di Cauchy:

$$2l = \int_0^{2\pi} r(\phi) d\phi$$

E' chiaro che in questo risultato finale ogni riferimento al cerchio è inessenziale: il punto O è semplicemente un punto arbitrario interno alla curva regolare, chiusa e convessa in oggetto.
Interessante e suggestivo per gli studenti è il calcolo di integrali con metodi ***Montecarlo*:**
***Hit or Miss (Colpito o mancato) e Sample Mean (Media campionaria).***

O. Serra