

Ottavio Serra

Complessità e predicibilità

Predicibilità.

La predicibilità è la caratteristica di una teoria scientifica di prevedere l'evoluzione di un sistema fisico in base alla conoscenza dei dati iniziali. Il caso più semplice di predicibilità ci è offerta in astronomia dalla teoria newtoniana della gravitazione: la conoscenza a un dato istante dello stato dinamico del sistema solare permette di predirne l'evoluzione futura (e anche la storia passata, dato che le equazioni del moto sono invarianti rispetto all'inversione temporale).

La predicibilità è un requisito essenziale di ogni dispositivo tecnico: il funzionamento di una macchina deve essere prevedibile perché essa sia affidabile. Anche le leggi scientifiche esibiscono il requisito della predicibilità. Pare che la predicibilità sia sentita dall'uomo come un'esigenza irrinunciabile, perseguita da sempre dapprima attraverso il mito e la magia, in seguito mediante la scienza.

La predicibilità esibita dai dispositivi tecnici è subordinata alla predicibilità delle leggi scientifiche sottostanti che godono della predicibilità perché semplici. Tutte le leggi fondamentali, dalla fisica classica alla relatività alla fisica quantistica sono concettualmente semplici e, dato che sono espresse mediante equazioni differenziali, deterministiche. (Sic, anche la fisica quantistica è deterministica: l'evoluzione temporale della funzione di stato è governata da un'equazione differenziale, l'equazione temporale di Schrodinger; l'aspetto probabilistico e l'indeterminazione compaiono quando si applica la funzione di stato, o funzione d'onda, al calcolo di grandezze *corpuscolari* quali posizione, impulso, energia).

La semplicità delle leggi fondamentali non garantisce da sola la semplicità di comportamento e quindi la predicibilità di un sistema fisico. Occorre che il sistema sia *piccolo*, cioè costituito da poche particelle significative, come il sistema solare nel quale le migliaia di asteroidi hanno massa così piccola rispetto ai pianeti da potersi considerare inesistenti, e anzi, come nel sistema solare, con una particella, il Sole, di gran lunga predominante sulle poche altre, i pianeti.

Gli spettacolari successi di previsione che queste fortunate circostanze permisero nel campo limitato del sistema solare convinsero Laplace che una mente abbastanza potente da conoscere a un dato istante lo stato dell'universo avrebbe potuto vederne il passato e il futuro come se fosse stato presente ai suoi occhi.

E' chiaro che qui si impongono due ordini di considerazioni che infrangono il sogno di Laplace: in primo luogo lo stato iniziale di un sistema non è mai noto con assoluta precisione; gli errori di osservazione e di misura, per quanto piccoli almeno in fisica classica, si ripercuotono in modo sempre più grave sui valori delle grandezze caratterizzanti il sistema man mano che ci si allontana verso il passato o verso il futuro, fino a rendere il sistema totalmente imprevedibile; in secondo luogo occorre fare i conti col principio quantistico di indeterminazione, che impedisce in linea di principio di parlare di posizione e di velocità di una particella con incertezza arbitrariamente piccola.

Naturalmente Laplace era ben conscio del primo ordine di considerazioni; il suo rigido determinismo era solo di principio, e non è un caso che egli sia stato tra i primi a introdurre considerazioni probabilistiche nella scienza. Tuttavia tutti erano convinti che un sistema piccolo, soggetto a leggi semplici, dovesse avere un comportamento semplice e perciò prevedibile (predicibile) anche sulle lunghe distanze, temporali e spaziali.

Già però Poincaré, studiando il problema di tre corpi soggetti a interazione gravitazionale, due dei quali di massa comparabile e il terzo di piccola massa, aveva notato che il terzo corpo mostrava una traiettoria estremamente complicata e praticamente imprevedibile dopo poco tempo. L'imprevedibilità del sistema dei tre corpi è essenzialmente dovuta alla non linearità delle interazioni gravitazionali e al fatto che esse sono confrontabili, per cui non è possibile applicare il metodo delle perturbazioni con la stessa efficienza che il metodo presenta nel caso del sistema solare. In questo caso si considera il pianeta studiato soggetto inizialmente solo all'attrazione del sole e in un

secondo momento si fa intervenire l'attrazione degli altri pianeti come una perturbazione all'azione predominante del Sole.

Nel caso dei tre corpi il metodo converge con estrema lentezza perché non c'è un'azione predominante sulle altre; ciò comporta una dipendenza estremamente sensibile dalle condizioni iniziali; piccole differenze di partenza comportano traiettorie molto differenti, con perdita di stabilità del sistema e rapido avvio verso una situazione caotica.

La conclusione è che sistemi semplici non esibiscono necessariamente comportamenti semplici. Naturalmente ci sono sistemi dinamicamente molto complessi che mostrano un comportamento semplice a prezzo di un radicale mutamento di prospettiva; è il caso di un gas, dinamicamente intrattabile, che si comporta in modo semplice e predicibile considerato come un sistema termodinamico; non c'è niente di imprevedibile nel comportamento termodinamico di una bombola di gas (possibilmente perfetto).

Le cose cambiano in modo drammatico considerando un sistema di grande scala come l'atmosfera terrestre che non è certamente un gas perfetto chiuso in un recipiente, ma un sistema interagente con gli oceani e i continenti, riscaldamento disomogeneo, grandi moti convettivi e turbolenti e transizioni di fase della sua componente idrica. Per questi motivi la meteorologia non può che limitarsi a previsioni a breve termine.

Modelli di sistemi semplici a comportamento complesso.

Un modello di sistema semplice è una funzione $f(x)$ il cui valore è utilizzato come ingresso della funzione stessa: $x_{n+1} = f(x_n)$. Se f è lineare o più in generale monotona, non c'è niente di complesso o imprevedibile nel comportamento del sistema. Per esempio, nel caso di una funzione reale di variabile reale, sia $f(x) = x^3$. Allora la successione x_n tende a 0 se il seme $x_0 \in]-1, 1[$, tende a -1 o ad 1 se il seme x_0 è rispettivamente -1 o 1 , tende a $-\infty$ se $x_0 < -1$, tende a $+\infty$ se $x_0 > 1$. Con terminologia consacrata dall'uso diremo che 0 è un punto fisso attrattivo o stabile, nel senso che ogni seme dell'intervallo aperto $]-1, 1[$ genera una successione che tende a 0, $-\infty$ e $+\infty$ sono attrattori, i cui bacini di attrazione sono rispettivamente l'insieme dei numeri minori di -1 e maggiori di 1, -1 e 1 sono punti fissi repulsivi o instabili (ogni seme diverso da 1 genera una successione che si allontana da 1; lo stesso dicasi di -1).

Per avere perciò un comportamento complesso occorre scegliere una funzione non monotona. Ci si chiede per prima cosa se la funzione ha punti fissi e, nel caso affermativo, se sono stabili. Un punto fisso è un punto x^* tale che $f(x^*) = x^*$; esso è stabile se, con larga arbitrarietà della scelta del seme x_0 la successione $x_n = f(x_{n-1})$ converge a x^* . In pratica il seme deve potersi scegliere in un intervallo avente x^* al suo interno o alla sua frontiera.

Geometricamente un punto fisso è l'intersezione del grafico di f con la retta di equazione $y = x$.

La condizione di stabilità del punto fisso è che in un suo intorno la funzione f sia sub_lineare cioè che esista una costante p positiva e minore di 1 tale che, per tutti gli x, x' dell'intorno di x^* risulti $|f(x) - f(x')| \leq p |x - x'|$.

Una condizione sufficiente, ma non necessaria, per la stabilità è che f sia derivabile nel punto fisso e che il modulo della derivata sia minore di 1.

(Le dimostrazioni sono omesse per brevità).

La f può essere una funzione reale di una o più variabili reali, oppure una funzione di variabile complessa. Io presenterò un modello di iterazione su una funzione quadratica di una variabile reale, che già presenta interessanti proprietà e poi un modello di iterazione su una funzione quadratica di variabile complessa che genera l'insieme di Mandelbrot e gli insiemi di Julia, con inaspettate strutture di mirabile complessità e bellezza, quando si pensi all'estrema semplicità della funzione generatrice. Le immagini che presenterò sono state generate con programmi che possono essere utilizzati presso il Liceo Scorza per seguire *in diretta* la creazione delle immagini a colori. I nomi dei programmi in oggetto sono rispettivamente "ATTRATT" e "FRATT16".

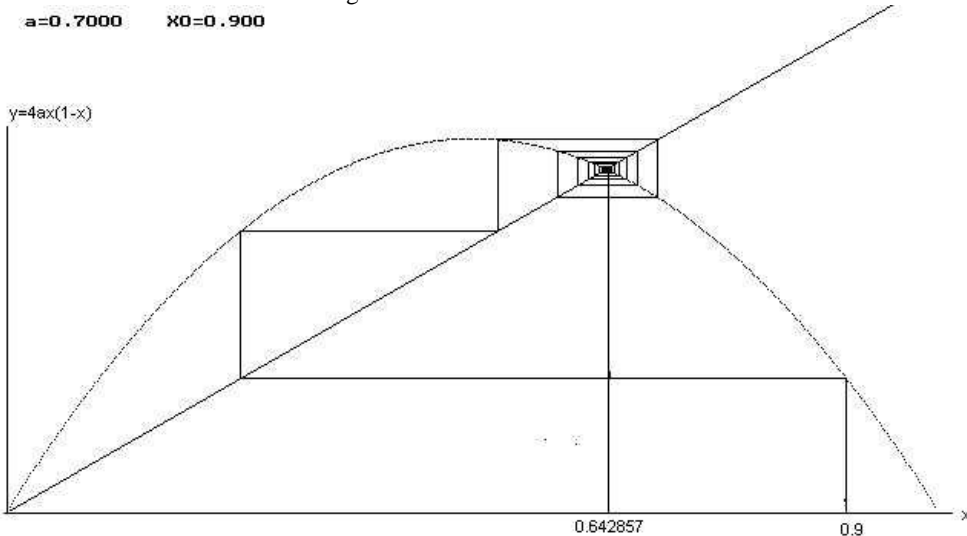
Funzione quadratica di una variabile reale.

Considero la funzione $f(x) = 4ax(1-x)$ definita nell'intervallo $[-1,1]$. Il parametro reale a , che rappresenta l'ordinata del massimo, guida il comportamento del sistema. Supporremo a positivo e minore di 1, in modo che il valore di f sarà anch'esso compreso tra 0 e 1 e potrà essere immesso come nuovo valore di x .

Un possibile sistema fisico governato dalla funzione f è stato immaginato da Dewdney ("Alla scoperta delle strane attrattive del caos", Le Scienze, n°229, Settembre 1987). Supponiamo di avere tre amplificatori, il primo dà in uscita la tensione x , che viene passata agli altri due; il secondo dà in uscita $1-x$ in risposta ad x ; il terzo riceve x dal primo, $1-x$ dal secondo, moltiplica tra loro le due tensioni e passa il prodotto, moltiplicato per la tensione di controllo $4a$, al primo amplificatore. Il circuito è completato da un rivelatore della tensione di uscita dal primo amplificatore. Quando a è minore di $3/4$ e il seme x_0 è maggiore di zero, dopo una fase transitoria la tensione si assesta su un unico valore, $1 - 1/4a$ (attrattore a un solo punto). Se si innalza la tensione di controllo $4a$ ad un valore maggiore di 3 ($a > 3/4$), il circuito oscilla tra due tensioni, poi tra 4, 8 valori e così via, finché per $a > 0.9$ l'uscita oscilla tra un'infinità di valori praticamente imprevedibili: il comportamento è caotico.

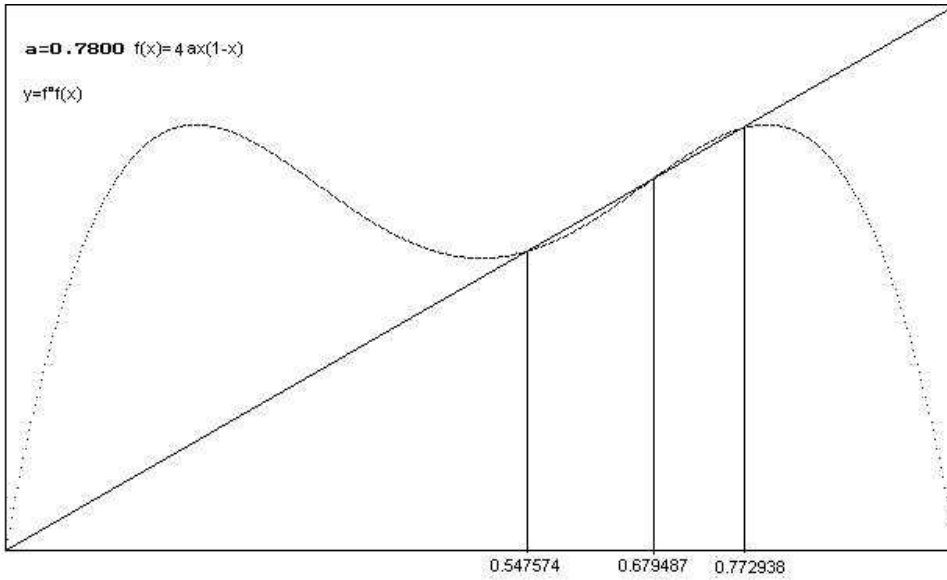
Per $a < 1/4$ il grafico della parabola è tutto al di sotto della bisettrice del 1° quadrante e l'unico punto fisso (attrattivo) è lo zero. Per a compreso tra $1/4$ e $3/4$ la retta $y=x$ interseca la parabola, oltre che in $x=0$, nel punto $x^* = 1-1/4a$ nel quale punto la pendenza di f , derivata di f , è $2-4a$ e perciò in modulo minore di 1 finché $a < 3/4$. Lo zero è ora punto fisso repulsivo, mentre x^* è un attrattore. Con $a=0.7$, la pendenza in $x=0$ è 2.8, mentre in $x^* = -0.8$.

Fig. 1



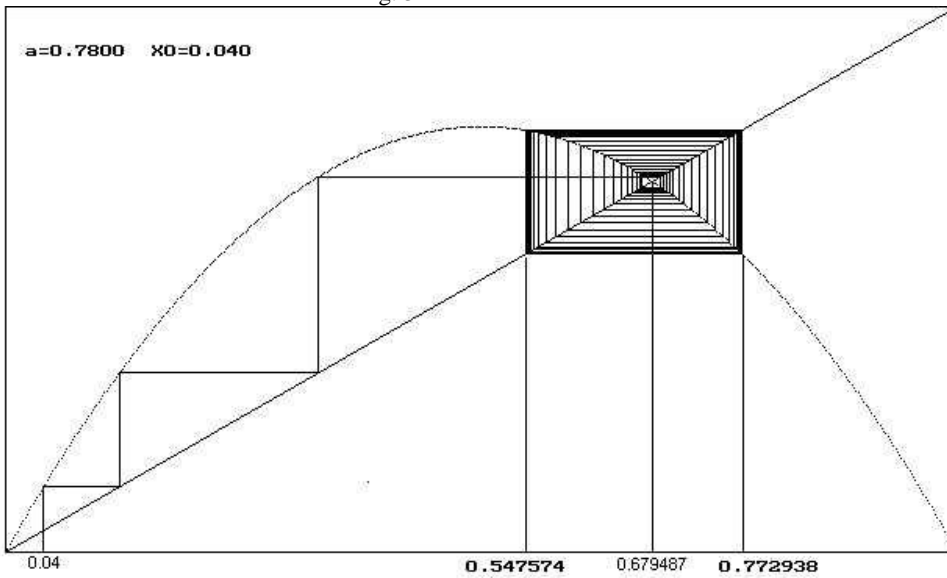
Per $a=3/4$, $x^* = 1-1/4a = 2/3$ e la pendenza è -1, perciò x^* è sul punto di diventare repulsivo. Se a supera $3/4$, x^* è punto fisso repulsivo, mentre compare un attrattore costituito da due punti. x_1 e x_2 . Ciò si giustifica considerando la funzione $g(x)=f^2(x)$, che ha 0 e x^* ancora come punti fissi (se lo sono per f , lo sono per f^2) e in più altri due con pendenza in modulo minore di 1. (vedi fig. 2 con $a=0.78$)

fig. 2



Nella fig. 3 è mostrata la $f(x)$ con lo stesso $a=0.78$.

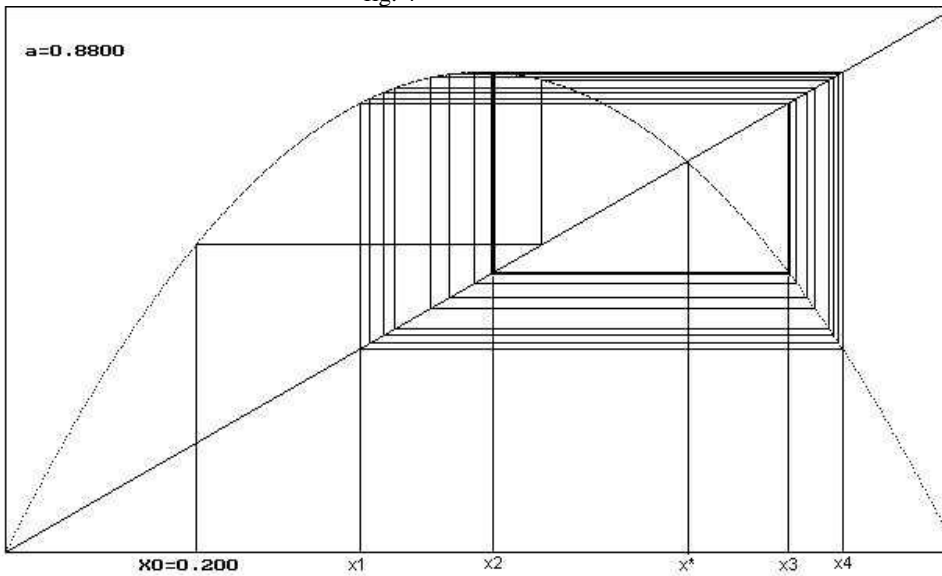
fig. 3



Si noti che qualunque valore del seme diverso da 0 e da $1-1/4a=0.679487$ conduce la successione x_n a saltellare, dopo un transiente iniziale, dall'uno all'altro dei due valori dell'attrattore bistabile: 0.547574 e 0.772938.

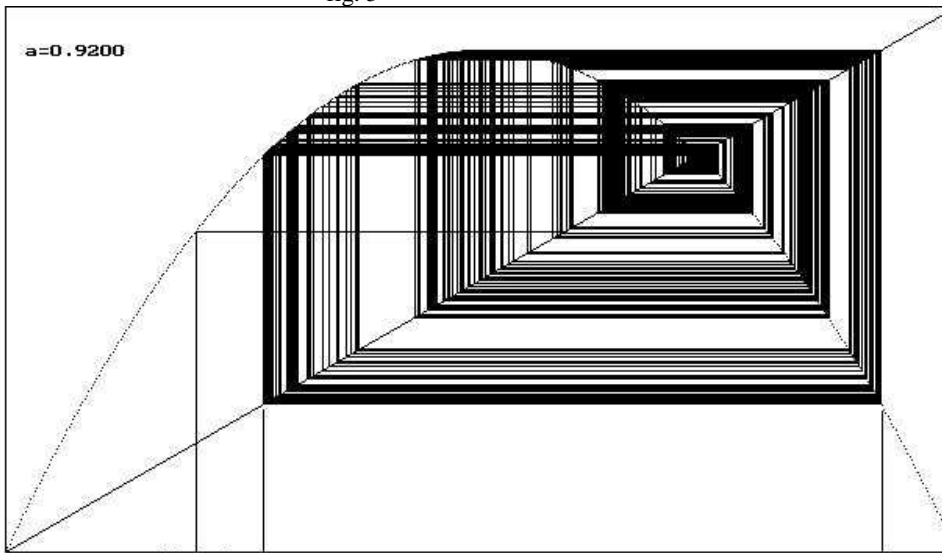
Nella fig. 4 viene mostrato un attrattore a 4 punti e infine nella fig. 5 un attrattore caotico o strano (a infiniti punti).

fig. 4



Ora l'attrattore è costituito dai 4 punti $x_1=0.37084, x_2=0.512076, x_3=0.823301, x_4=0.879487$.

fig. 5



Con $a=0.92$ l'attrattore consiste di una miriade di punti tra 0.27 e 0.92

Insieme di Mandelbrot.

Lo studio di attrattori acquista particolare rilevanza se trattato nel piano complesso. Il caso più semplice e che tuttavia conduce a una incredibile ricchezza di forme è quello dell'iterazione della funzione quadratica $f(z)=z^2+c$, essendo z e c numeri complessi. L'iterazione è data dalla formula

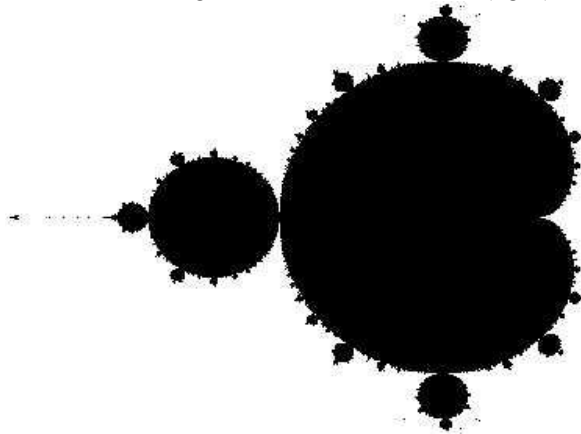
$$(1) \quad z_{n+1}=(z_n)^2+c.$$

Due sono le possibilità: si fissa il seme z_0 e si opera nel piano complesso c oppure si fissa c e si opera nel piano complesso z . Nel primo caso si ottiene l'insieme di Mandelbrot, nel secondo caso, al variare di c , gli (infiniti) insiemi di Julia.

Consideriamo il caso dell'insieme di Mandelbrot. Il seme z_0 si può scegliere, senza perdere di generalità, uguale a zero; una scelta diversa produce solo una distorsione dell'insieme. Al variare di c nel piano complesso la successione (1) può mantenersi limitata (modulo di z finito) oppure divergere. Nel primo caso c appartiene all'insieme di Mandelbrot. E' particolarmente significativa la frontiera dell'insieme di Mandelbrot, costituita dai punti c^* negli intorno dei quali ci sono sia punti c che rendono convergente la successione (1) sia punti c che la rendono divergente.

In pratica, per stabilire se la successione (1) converge o meno, si usa il seguente criterio: si fissa un numero N più o meno grande, per esempio 300; se dopo N iterazioni il modulo di z si mantiene minore di 2, si può ritenere con ragionevole sicurezza che c appartiene all'insieme di Mandelbrot. Se viceversa, dopo un numero di iterazioni minori di N il modulo di z supera 2, è certo che modulo di z tende a $+\infty$ e c non appartiene all'insieme. Chiaramente, per quanto grande sia N , il criterio di convergenza adottato, puramente empirico, non garantisce l'appartenenza di c all'insieme di Mandelbrot; certamente, più N è grande e più il criterio è affidabile, ma purtroppo più N è grande e più cresce il tempo di iterazione che va ripetuta per alcune centinaia di migliaia di punti se vogliamo un'immagine di 400 o più pixel per lato. Occorre perciò un compromesso nella scelta di N ; un valore di N da 200 a 500 si può considerare ragionevole in base alla mia esperienza.

La rappresentazione grafica dell'insieme di Mandelbrot si ottiene lasciando *neri* i punti dell'insieme di Mandelbrot e colorando di bianco (o altro colore) quelli che non gli appartengono. Appare così in evidenza la frastagliata frontiera dell'insieme. (fig. 6)



L'ascissa di c va da -2 a 0.75, l'ordinata da -1.5 a 1.5.

Nelle pagine successive verranno mostrate immagini a colori dell'insieme di Mandelbrot e di un suo particolare costruite col seguente criterio: se un punto c rende divergente la successione (1), il pixel corrispondente a c verrà colorato in base alla rapidità di divergenza, precisamente, se bastano k ($k < N$) iterazioni perché il modulo di z superi 2, il pixel verrà colorato col colore k ; in pratica, sic-

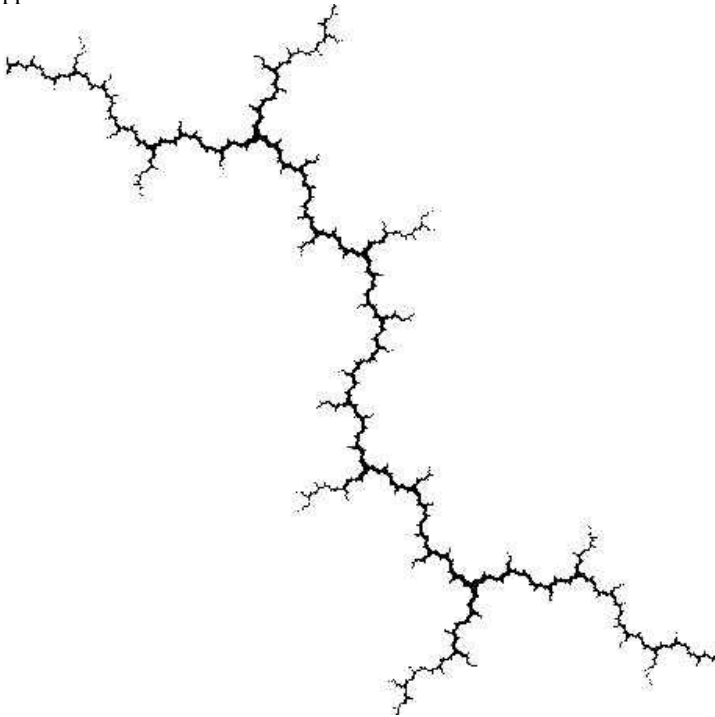
come i colori disponibili sono 15, il colore sarà quello di numero k modulo 15. Lo stesso sarà fatto per alcuni insiemi di Julia.

In questo modo si evidenziano le orbite, cioè gli insiemi di punti che sono attratti con la stessa rapidità dall'infinito.

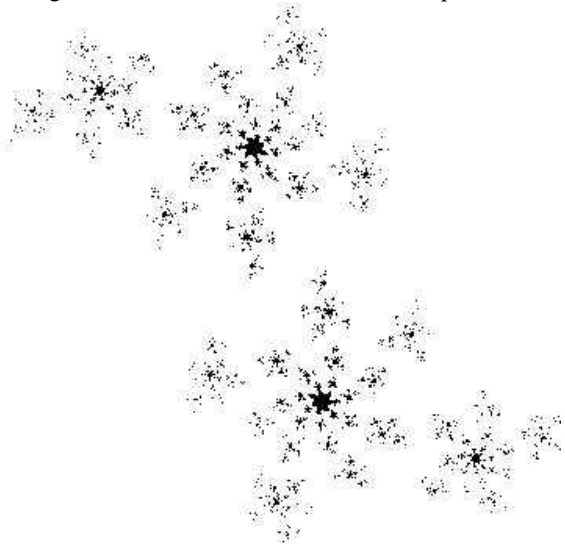
Insiemi di Julia.

Un insieme di Julia J_c si ottiene fissando il numero complesso c ed è costituito da tutti i numeri complessi z tali che la successione (1) sia convergente. Si trova che a seconda di come si sceglie c , J_c è connesso oppure costituito da parti non connesse. Importanti risultati teorici furono ottenuti già nel 1919 dai matematici francesi Fatou e Julia, ma solo dopo che Mandelbrot ebbe l'idea di utilizzare la grafica al computer fu possibile rendere intuitive le ricerche matematiche degli autori francesi. L'insieme ora detto di Mandelbrot risultò essere l'insieme dei punti c per cui il corrispondente insieme di Julia J_c è connesso. Man mano che c si sposta dall'interno all'esterno dell'insieme di Mandelbrot M , J_c da connesso diventa sconnesso, passando per un aspetto *dentritico* quando c attraversa la frontiera di M .

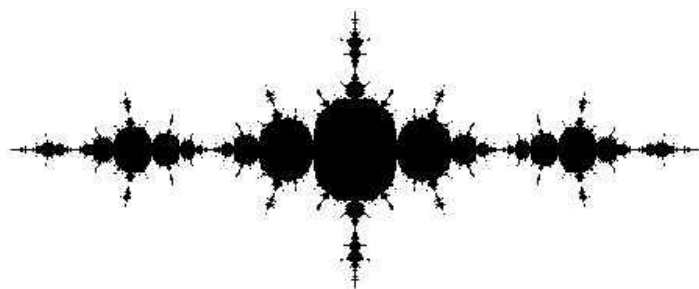
In questa pagina è riprodotto in bianco e nero un insieme di Julia con $c=i$. Esso è dentritico perchè c appartiene alla frontiera di M .



Il seguente è un insieme di Julia sconnesso perché $c=0.12+0.68i$ non appartiene ad M :



Il prossimo è connesso, perché $c=-1.25$ appartiene ad M :



Nelle tre pagine seguenti sono presentate immagini a colori dell'insieme di Mandelbrot, di un suo particolare e di tre insiemi di Julia. Il colore consente di evidenziare una grande ricchezza di particolari della frontiera che in bianco e nero vanno perduti. Si veda la differenza nel terzo insieme di Julia (fig. 11 e 11 bis)

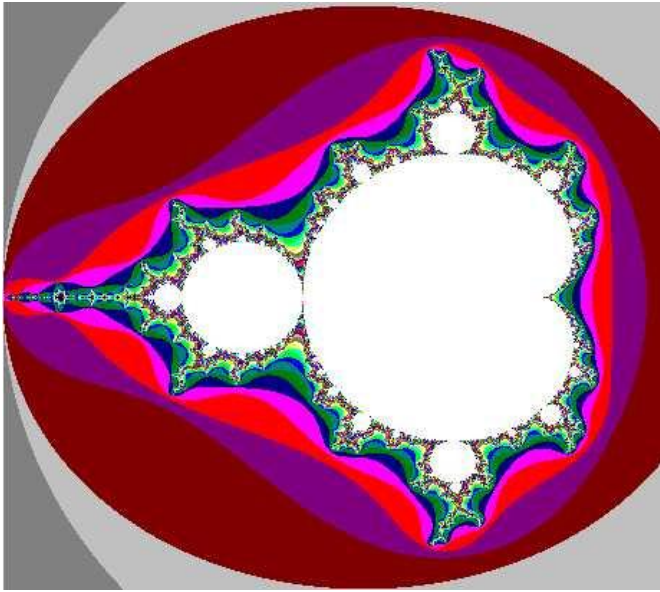


Fig 7
Mandelbrot, x tra -2 e 0.75, y tra -1.5 e 1.5 (panoramica)

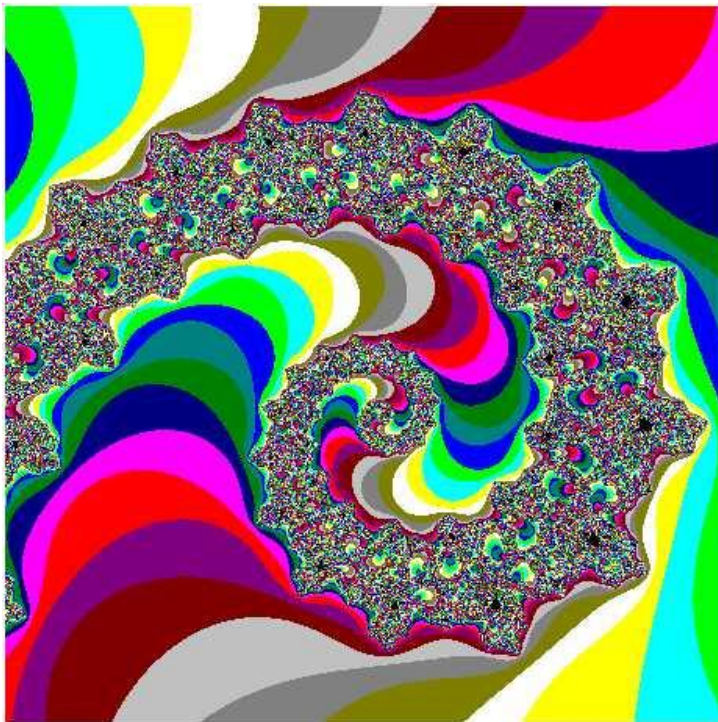


fig. 8
Mandelbrot (particolare)
x tra -0.74591 e -0.74448, y tra 0.11196 e 0.11339

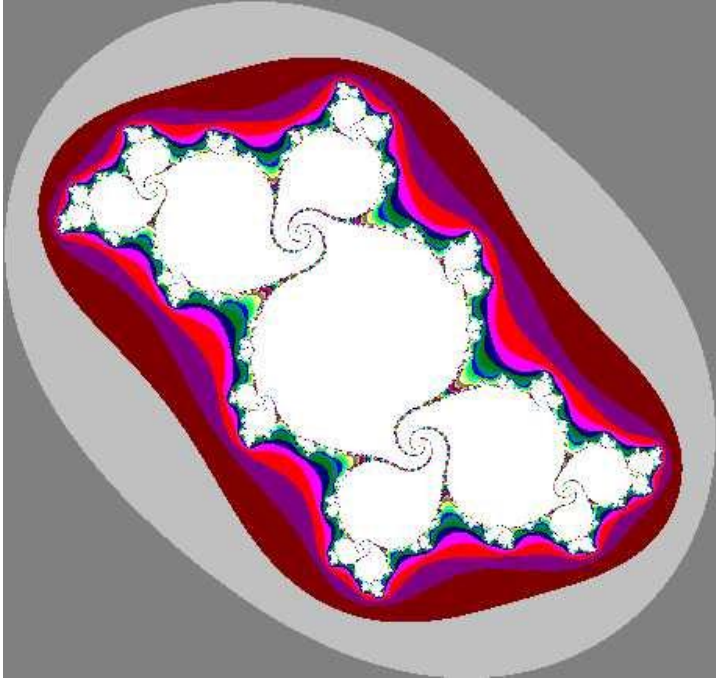


Fig 9
 Julia, $c = -0.11 + 0.6557i$; x e y tra -1.5 e 1.5.

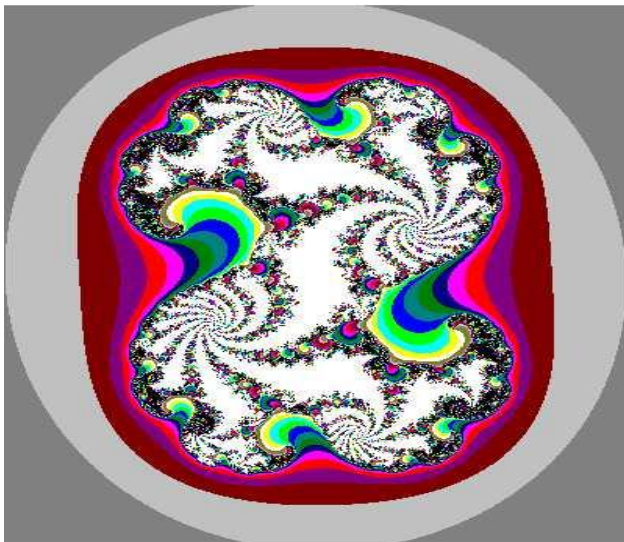


Fig 10
 Julia, $c = 0.32 + 0.043i$; x tra -2 e 2, y tra -1.5 e 1.5

In questa pagina è riportato, in bianco e nero e a colori, J_c con $c = -0.11 + 0.6557i$.

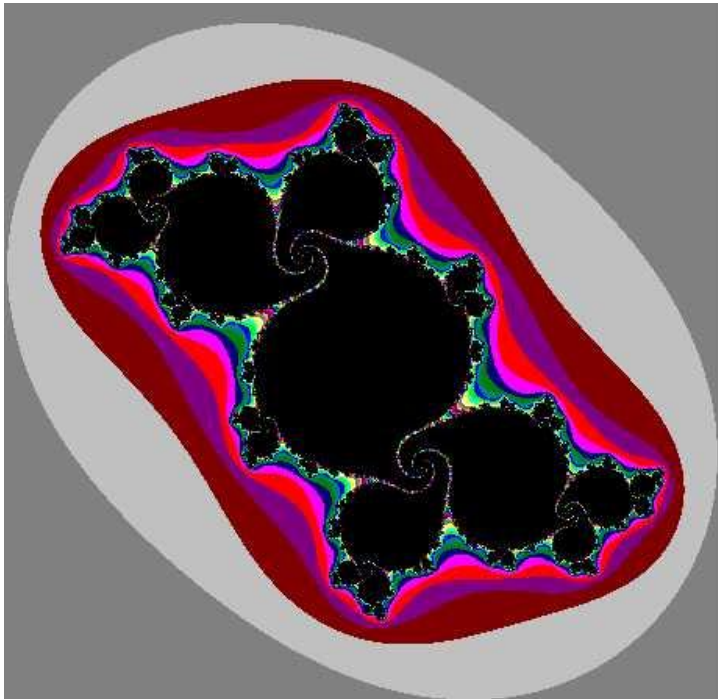
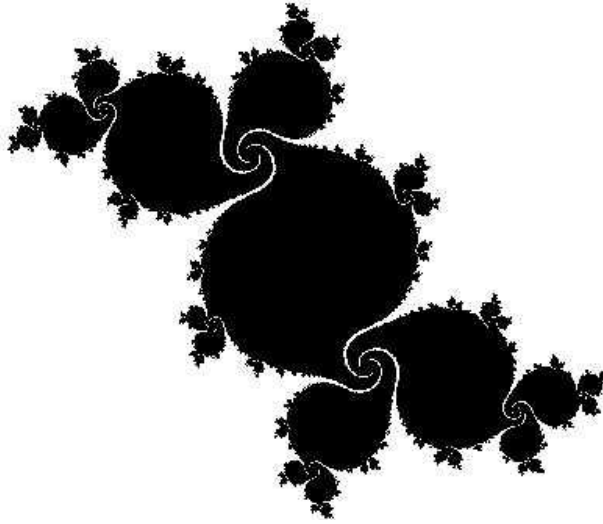


Figure 11 e 11 bis.

Insiemi frattali.

Gli insiemi di Julia, come quello di Mandelbrot, sono detti insiemi frattali. Essi non sono gli unici insiemi frattali; vengono detti tali gli insiemi che presentano una struttura infinitamente ramificata e frastagliata, come in prima approssimazione una linea costiera, una catena di montagne, i bronchi o il sistema delle arterie di un animale.

Un insieme è frattale se ha dimensione frattale.

La definizione di dimensione frattale risale al matematico Hausdorf, che la diede negli anni tra il 1915 e il 1920.

La dimensione di Hausdorf di un insieme X di uno spazio metrico è un concetto tecnico abbastanza complesso; intuitivamente, si può definire come segue: si consideri un reticolato a maglie quadrate (m -dimensionali se lo spazio ha dimensione m) che ricopre X e sia h lo spigolo delle maglie, $n(h)$ il numero delle maglie che hanno punti in comune con X ; facendo tendere h a zero, $n(h)$ crescerà come h^{-D} ; D è la dimensione di Hausdorf dell'insieme X . X sarà detto insieme frattale, se D non è intero.

Per esempio, per una curva regolare D è 1, per una figura piana usuale D è 2; non si tratta di insiemi frattali.

Nel 1982 il matematico belga David Ruelle dimostrò che la dimensione di un insieme di Julia (per c molto piccolo in modulo rispetto ad 1) è

$$D(J_c) = 1 + \frac{2}{\log 2} \log |c| + \text{termini infinitesimi rispetto a } c$$

e questo è uno dei pochi risultati teorici nuovi sugli insiemi di Julia.

Un insieme frattale gode della proprietà di autosomiglianza o invarianza per riduzione di scala, nel senso che in ogni sua parte è presente l'immagine del tutto; per esempio, una porzione comunque piccola di un insieme di Julia permette di ricostruire l'intero insieme. Non è il caso di lasciarsi suggestionare troppo, ma non si può non notare l'analogia col DNA e con la possibilità di clonare un animale a partire dal DNA di una singola cellula.

L'insieme di Mandelbrot gode anch'esso, chiaramente, dell'invarianza per riduzione di scala. Sono evidenti già nella figura 6 in bianco e nero le innumerevoli repliche in miniatura dell'intero insieme, in più presenta un'infinità di strutture nuove e inaspettate, come quella a colori di figura 8, che è un ingrandimento di una delle estremità dell'istmo che separa il corpo circolare di sinistra dalla grande cardioide di destra di M (vedi fig. 7). La figura 8 è circa 2000 x 2000 volte più piccola dell'intero insieme di Mandelbrot di figura 7: il programma di generazione delle immagini funziona perciò come un potente microscopio; se la figura 7 fosse alla stessa scala della figura 8, occuperebbe un quadrato di 200 metri di lato. Il potere risolutivo di un simile microscopio è limitato soltanto dall'aritmetica usata; con un'aritmetica a 18 cifre, è possibile ingrandire alle dimensioni di figura 7 particolari mille miliardi di volte più piccoli. Nella pagina seguente è riportato un ingrandimento della parte centrale di fig. 8 di 2 centomillesimi di lato (fig. 12).

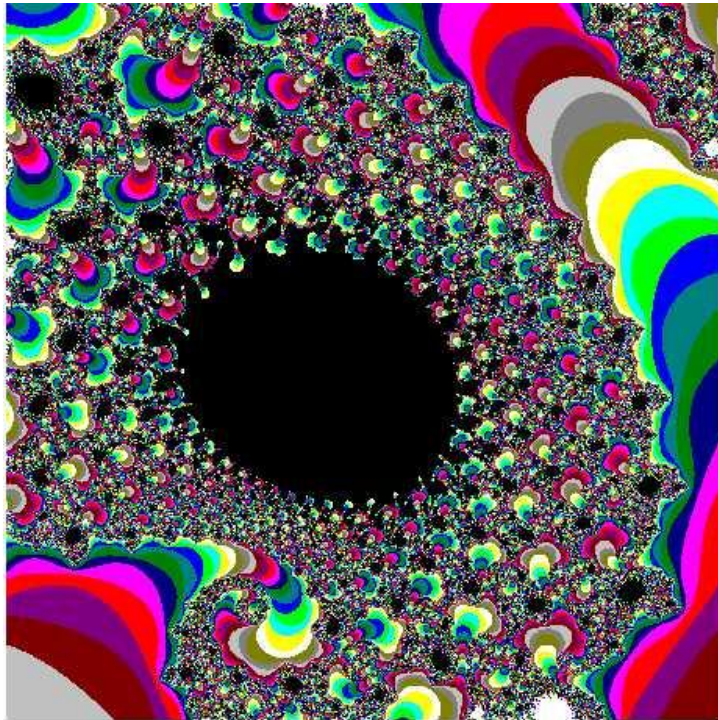


Fig.12

Bibliografia minima.

- 1) Peitgen e Richter: "La bellezza dei frattali", Bollati-Boringhieri, 1987;
- 2) AA.VV: "Caos, le leggi del disordine", Le Scienze S.p.A. Editore, 1991.

Ottavio Serra

Commento [s1]: Bibliografia minima:
1) Peitgen e Richter: "La bellezza dei frattali", Bollati-Boringhieri, 1987;
2) AA.VV: "Caos, le leggi del disordine", Le Scienze S.p.A. Editore, 1991.