

Ottavio Serra

PRINCIPI ESTREMALI IN FISICA

Questo articolo è stato pubblicato su "Scuola e Cultura in un Liceo Italiano" di Giuseppe Plastina, Calabria Letteraria Editrice, Soveria Mannelli (CZ) 2002, nella sezione "Scritti in onore di Giuseppe Plastina", in occasione del suo pensionamento.

Introduzione.

Le leggi di conservazione della fisica, classica e quantistica, si possono derivare da principi di simmetria connessi all'omogeneità e all'isotropia dello spazio e all'omogeneità del tempo. (1)

E' chiaro che in generale lo spazio non è né omogeneo né isotropo, così come il tempo non è omogeneo. Per esempio, lo spazio prossimo alla superficie della Terra non è isotropo, avendo una direzione privilegiata, che è quella verticale della gravità.

E' però un fatto d'esperienza, elevato al rango di principio, che è possibile trovare (infiniti) sistemi di riferimento rispetto ai quali valgono quei principi di simmetria (sistemi di riferimento inerziali). Ciò conduce da una parte alla relatività galileiana, dall'altra alle leggi di conservazione della quantità di moto, del momento angolare e dell'energia, per limitare il discorso alla meccanica.

Per ottenere queste conseguenze occorre partire dalle leggi del moto di Newton.

Segue poi che le leggi della meccanica (in generale della fisica) sono tali che l'evoluzione di un sistema avviene in modo che qualche opportuna grandezza assume valore estremale (massimo o minimo).

Viceversa, seguendo questo schema concettuale, è possibile riottenere le leggi del moto di Newton con il formalismo lagrangiano ed hamiltoniano, che consente una naturale estensione alla meccanica quantistica.

Di solito il valore estremale di massimo, come vedremo nel caso della riflessione ottica e meccanica, è un caso eccezionale, perciò di solito si parla, anziché di principi estremali, di principi di minimo.

La grandezza che assume il valore estremale può essere la lunghezza della traiettoria, o il tempo impiegato, o l'azione. L'azione di un sistema fisico ha la dimensione di un'energia moltiplicata un tempo. La formulazione più generale della meccanica fondata sul principio di *minima* azione, è dovuta ad Hamilton.

Secondo Hamilton l'azione S di un sistema meccanico è data dal seguente integrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, q', t) dt$$

dove la funzione $L(q, q', t)$ è detta lagrangiana del sistema e ha le dimensioni di un'energia; q' è la derivata di q rispetto al tempo.

Imponendo che la variazione δS di S si annulli, passando dalla traiettoria effettiva a una traiettoria variata ma con gli stessi estremi, cioè da q a $q + \delta q$, con $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, si ottiene l'equazione del moto (equazione di Lagrange):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q'} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

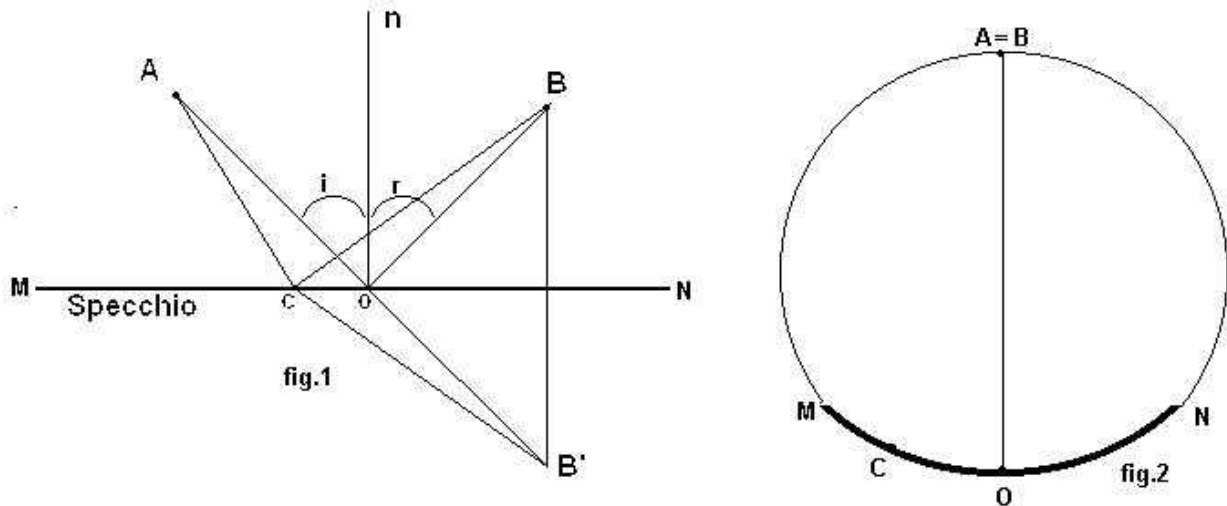
In generale le coordinate q sono più d'una, tante quanti sono i gradi di libertà del sistema, diciamo n , pertanto si ottengono n equazioni di Lagrange.

La deduzione dell'equazione di Lagrange si può trovare in (1).

Nel presente articolo sarà dedotta nel caso particolare del problema della *bracristocrona*, cioè della curva giacente in un piano verticale lungo la quale la caduta di un grave avviene nel minimo tempo.

La riflessione.

La riflessione di una particella che urta elasticamente una parete segue la stessa legge della riflessione di un raggio luminoso su uno specchio. Questa legge, complanarità del raggio incidente, del raggio riflesso e della normale allo specchio e uguaglianza degli angoli di incidenza e di riflessione, si può derivare dal principio che la lunghezza del percorso sia estrema, di solito minima.



Dalla fig. 1 si vede che il percorso effettivo da A a B, toccando lo specchio, è minimo se il punto di riflessione O è l'intersezione dello specchio con AB' , essendo B' il simmetrico di B rispetto allo specchio MN, perché in tal caso, essendo $OB=OB'$, il cammino AOB risulta uguale al segmento AOB' ed è minimo rispetto ad ogni cammino ACB. Ma allora, essendo gli angoli AOM e BON uguali perché entrambi uguali all'angolo $B'ON$, saranno uguali anche i loro complementari: $i=r$.

Che poi i raggi incidente e riflesso, AO e OB, siano complanari con la normale n allo specchio, segue dal fatto che BB' è parallelo ad n, perché entrambi ortogonali allo specchio.

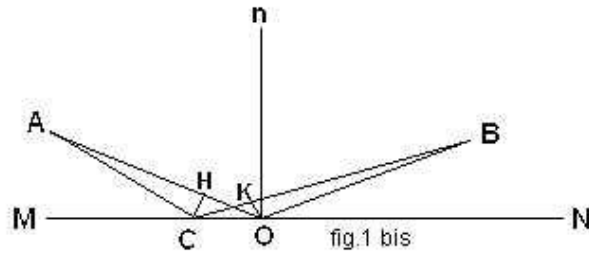
Nel caso della fig. 1 la riflessione segue effettivamente il percorso minimo, perché il massimo non esiste: l'estremo superiore del percorso ACB può essere arbitrariamente grande, al variare di C sullo specchio.

La fig. 2 mostra invece il caso in cui il percorso effettivo (con $i=r=0^\circ$) è massimo: lo specchio MN fa parte di una circonferenza (un anello cilindrico); perché un raggio di luce partendo da un punto A della circonferenza torni in A ($B=A$) per riflessione, occorre che colpisca lo specchio nel punto O diametralmente opposto ad A. In tal caso il percorso è un diametro andata e ritorno ed maggiore di ogni altro percorso ACA. Si noti che la normale allo specchio coincide col diametro AO. (2)

Il fatto che abbiamo ottenuto la legge della riflessione col principio del *minimo* percorso significa che vale anche il principio del minimo tempo? Sì, a patto che lo spazio sia otticamente omogeneo e isotropo, cioè che la velocità della luce sia la stessa in ogni punto e in ogni direzione. In generale il percorso della luce sarà retto dal principio del minimo tempo, ma ciò non significherà minima lunghezza del percorso.

Che cosa si può dire della riflessione di una particella materiale? Il percorso minimo implicherà il minimo tempo se lo spazio sarà meccanicamente omogeneo e isotropo, in particolare si dovrà ritenere: trascurabile la resistenza del mezzo e l'attrito, elastico l'urto, costante il potenziale di gravità. In generale varrà il principio di minima azione, ma ciò non implicherà né il minimo spazio, né a volte, il minimo tempo.

Mentre la dimostrazione adombrata nella fig.1 si ritiene posseduta già da Euclide nella *Catottrica*, una dimostrazione più vicina a quella che per primo diede Fermat per la rifrazione col principio del minimo tempo è quella suggerita dalla seguente fig.1 bis:



Si consideri il percorso variato ACB rispetto al cammino effettivo AOB, con CO infinitesimo. Riportando AC su AO in AH e BO su BC in BK, la differenza di cammino sarà

$\delta l = ACB - AOB = CK - OH$. Uguagliando δl a zero, si ha $CK = OH$ e i triangoli CHO, CKO saranno uguali per $CO \parallel 0$ (Gli angoli CHO e CKO risultano retti a meno di infinitesimi). Segue che gli angoli HOC e KCO sono uguali, ovvero $AOM = BCN = BON - CBO = \text{---} BON$, perché l'angolo CBO è infinitesimo con CO.

Dall'uguaglianza degli angoli AOM e BON segue l'uguaglianza dei loro complementari: $i = r$. (2)

E' chiaro che, supponendo il mezzo omogeneo e isotropo, il percorso della luce o di una particella materiale di lunghezza minima è equivalente al percorso in tempo minimo.

La rifrazione.

La rifrazione si ha quando un raggio di luce passa da un mezzo a un altro di indice di rifrazione diverso oppure una particella attraversa la superficie di separazione di due mezzi aventi diverso potenziale. Per esempio, una sferetta che si muove su un piano orizzontale e incontra un gradino che la porta su un piano orizzontale più basso (o più alto). Il potenziale di gravità subisce una brusca transizione da un valore costante a un altro valore costante. Lo stesso accade se, al posto della sferetta, abbiamo una carica elettrica che attraversa la superficie di separazione tra due regioni a diverso potenziale elettrico.

Il caso in cui il potenziale è costante prima e dopo la superficie di separazione è l'analogo di mezzi ottici con indici di rifrazione costanti.

Se l'indice di rifrazione (il potenziale) varia con continuità, il cammino ottico (la traiettoria) sarà una linea curva, anziché una sequenza di due tratti rettilinei, ma la sostanza concettuale non cambia, perciò tratterò soltanto il caso di indici costanti.

Come è noto, il cammino ottico è la somma dei prodotti delle lunghezze dei percorsi per i rispettivi indici di rifrazione:

$$L = n_1 s_1 + n_2 s_2 + \dots$$

Se ricordiamo che l'indice di rifrazione è definito come il rapporto $n = c/v$ tra la velocità della luce nel vuoto e la velocità della luce nel mezzo, si vede che il cammino ottico L coincide, a meno della costante c, col tempo (totale) impiegato dalla luce per spostarsi da un punto iniziale A a un punto finale B e perciò il principio del minimo tempo si può enunciare come principio del minimo cammino, purchè per cammino si intenda il cammino ottico L e non il cammino geometrico.

Anche per una particella materiale si può definire una grandezza avente la dimensione di una lunghezza e che sia l'analogo del cammino ottico per la luce; basta definire un indice di rifrazione attraverso le seguenti considerazioni:

In forma generale, il principio di Fermat per un raggio di luce è dato dalla formula

$$\delta S = \delta \int_A^B n \cdot ds = 0.$$

Analogamente, per una particella di massa m ed energia E in un campo di potenziale $V(x)$ il principio di minima azione di Hamilton si scrive

$$\delta \int_A^B \sqrt{2m(E - V(x))} ds = 0.$$

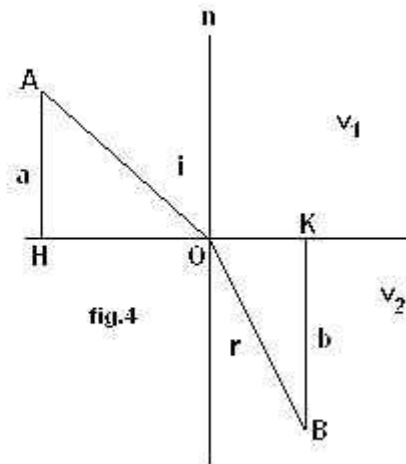
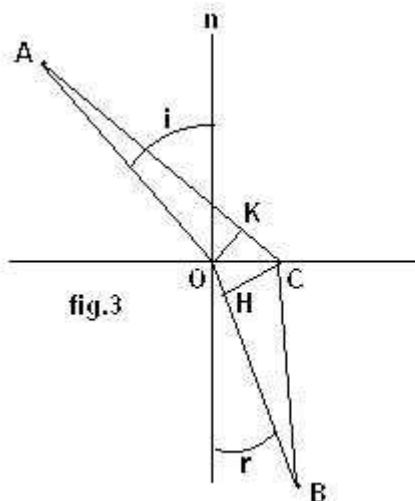
Confrontando le due formule, si può introdurre un indice di rifrazione (meccanico)

$$n = \sqrt{2m(E - V(x))}$$

Che consente di interpretare ogni problema ottico come un problema meccanico. All'ottica geometrica corrisponde la meccanica classica, all'ottica ondulatoria la meccanica quantistica. (3)

Si noti che l'indice di rifrazione meccanico non è un numero puro come l'analogo ottico, ma ha la dimensione di una quantità di moto; si potrebbe ottenere un numero puro dividendolo per una quantità di moto invariabile per particelle di massa assegnata m ; ciò si può ottenere nel modo più naturale ponendoci nell'ambito della meccanica relativistica e dividendo n per mc , essendo c la velocità della luce. Ma lasciare che l'indice di rifrazione meccanico abbia le dimensioni di una quantità di moto non altera le deduzioni, perché quelli che hanno significato fisico non sono gli indici di rifrazione, ma i loro rapporti (indici di rifrazione relativi).

Ricaviamo ora la legge della rifrazione:



Un raggio luminoso vada da A a B rifrangendosi in O. Sia v_1 la velocità nel primo mezzo, v_2 nel secondo (fig.3). Se ACB è un percorso variato, con OC infinitesimo, la differenza di tempo è $\delta t = (AC-AO)/v_1 - (OB-CB)/v_2 = KC/v_1 - OH/v_2 = OC \cdot \text{Sen}(i)/v_1 - OC \cdot \text{Sen}(r)/v_2$.

Imponendo $\delta t = 0$, Fermat ottenne la legge di Snell: $\text{Sen}(i)/\text{Sen}(r) = v_1/v_2 = n_2/n_1 = \text{costante}$, trascurando fenomeni di dispersione; rigorosamente costante per un raggio monocromatico).

Questa dimostrazione elementare si trova in (4).

La fig.4 (vedi (3)) permette di trovare lo stesso risultato in modo più rigoroso calcolando il minimo tempo del percorso AOB con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange (condizione ausiliaria di vincolo: $HK = \text{costante}$).

$$\phi = t + \lambda HK = \frac{AO}{v_1} + \frac{OB}{v_2} = \frac{a}{v_1 \cos i} + \frac{b}{v_2 \cos r} + \lambda(a \cdot \text{tg } i + b \cdot \text{tg } r).$$

Derivando rispetto ad i e ad r si ricava:

$$\frac{\partial \phi}{\partial i} = \frac{a \operatorname{sen} i}{v_1 \cos^2 i} + \lambda \frac{a}{\cos^2 i} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{b \operatorname{sen} r}{v_2 \cos^2 r} + \lambda \frac{b}{\cos^2 r} = 0$$

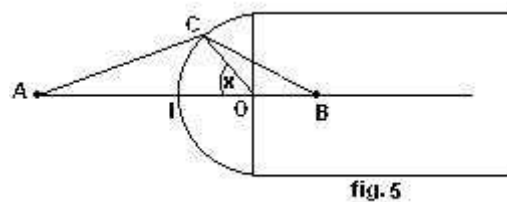
e si riottiene la legge di Snell.

Nota. Il fatto che Fermat, col suo principio del minimo tempo, abbia ottenuto la costante della rifrazione (costante per due mezzi assegnati e, a rigore, per luce monocromatica) come rapporto tra v_1 e v_2 , come ricavato da Huygens con la teoria ondulatoria della luce, a differenza di Cartesio che usando il modello corpuscolare di Newton trovava il rapporto inverso, convinse Fermat della *giustezza* della teoria ondulatoria. Bisognò aspettare, però, gli inizi dell'800 perché gli esperimenti di diffrazione di Young facessero universalmente abbracciare la teoria ondulatoria della luce.

Il riaffacciarsi di un modello corpuscolare agli inizi del '900 sotto forma di quanti di luce e il conseguente dualismo onda-corpuscolo, che finì per coinvolgere anche la materia *ordinaria* (fermioni) è un'altra storia e condusse alla fisica quantistica.

Un percorso rettilineo dall'aria al vetro che può richiedere un tempo **massimo**. (5)

Si consideri un cilindro di vetro di raggio r e indice di rifrazione n , la cui parte iniziale è una semisfera di centro O e raggio r . Sull'asse del cilindro si considerino due punti, A esternamente alla semisfera e B interno al cilindro, con $AI = IB = a$ (vedi fig. 5).



Il cammino ottico $L = AC + n \cdot CB$ è

$$L = \sqrt{r^2 + (a+r)^2 - 2r(a+r)\cos x} + n \cdot \sqrt{r^2 + (a-r)^2 + 2r(a-r)\cos x}$$

Derivando L rispetto all'angolo x si ricava che L è estrema per $x=0$.

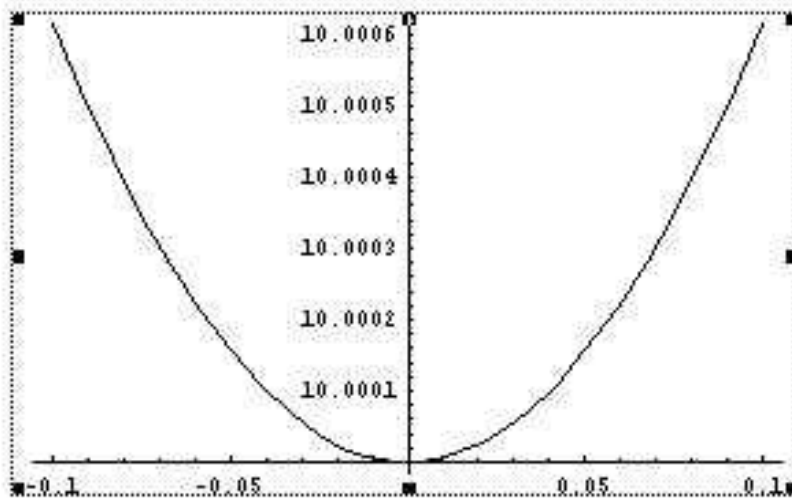
La derivata seconda di L in $x=0$ risulta maggiore di zero, uguale a zero, minore di zero secondo che a è, rispettivamente, minore, uguale, maggiore di $r(n+1)/(n-1)$. Pertanto, se $a > r(n+1)/(n-1)$ il cammino AIB ($x=0$) richiede il massimo tempo rispetto al percorso variato ACB .

Assunto $r=1$, $n=1.5$ (vetro tipico), il valore critico $r(n+1)/(n-1)$ è uguale a 5.

Qui di seguito sono riportati i grafici del cammino ottico $AC+nCB$ per due valori campioni di a : rispettivamente 4 (minimo tempo), e 6 (massimo tempo).

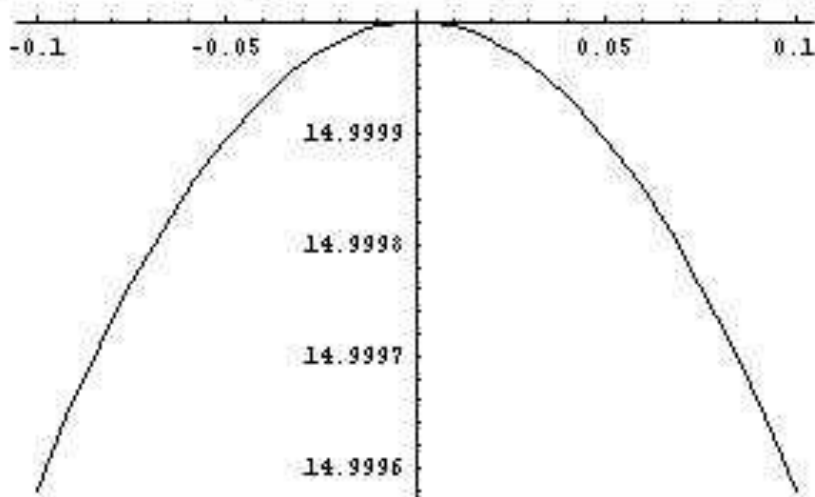
a=4, AIB cammino ottico minimo

`Plot[Sqrt[26 - 10 * Cos[x]] + 1.5 * Sqrt[10 + 6 * Cos[x]], {x, -0.1, 0.1}]`



a=6, AIB è il cammino ottico di massimo tempo

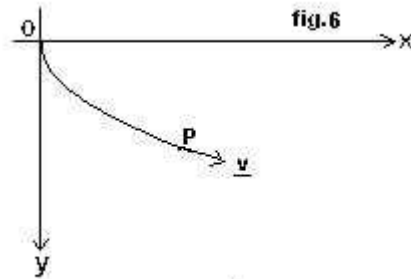
`Plot[Sqrt[50 - 14 * Cos[x]] + 1.5 * Sqrt[26 + 10 * Cos[x]], {x, -0.1, 0.1}]`



(I grafici sono stati ottenuti con "Mathematica").

Problema della brachistocrona.

Come applicazione del formalismo lagrangiano - hamiltoniano, studierò ora il problema di determinare la linea giacente in un piano verticale tale che un grave, vincolato a seguirla per scendere da un punto O a un punto P (senza attrito), impieghi il minimo tempo. E' inteso che la linea è pensata regolare, cioè continua e derivabile in ogni suo punto. Senza scapito di generalità, si può assumere O come origine di un sistema di assi cartesiani (vedi fig.6).



Assunta uguale a zero la velocità iniziale in O, v in P, la legge di conservazione dell'energia dà:

$$0 = -mgy + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gy}$$

Detto ds l'elemento d'arco, dt il differenziale del tempo, si ha: $dt = ds/v = L(y,y',x)dx$, avendo posto

$$L(y, y', x) = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}$$

(y' è la derivata di y rispetto ad x, L la lagrangiana del sistema).

Il tempo t impiegato dal grave per andare da O(0,0) a P(x,y) è allora:

$$t = \int_0^x L(y, y', \xi) d\xi, \text{ con } \delta y(0) = \delta y(x) = 0.$$

Imponendo la condizione di *estremo*, $\delta t = 0$, otteniamo

$$\delta t = \int_0^x \left(\frac{\partial L}{\partial y} \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' \right) d\xi = 0.$$

Integrando per parti il 2° addendo dell'integrale,

$$\int_0^x \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y' d\xi = \left[\frac{\partial L}{\partial y'} \delta y \right]_0^x - \int_0^x \frac{d}{d\xi} \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y d\xi = - \int_0^x \frac{d}{d\xi} \frac{\partial L}{\partial y'} \delta y d\xi, \text{ perchè } \delta y(0) = \delta y(x) = 0.$$

Pertanto si ottiene alla fine

$$\delta t = \int_0^x \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{d\xi} \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \delta y dx = 0, \text{ per ogni } \delta y,$$

da cui l'equazione di Lagrange: $\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$

N.B. Da questo momento si può porre $\xi = x$.

Applichiamo ora l'equazione di Lagrange al caso della brachistocrona, otteniamo:

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2} \cdot \sqrt{2gy}}, \text{ per cui } \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2} \cdot \sqrt{2gy}} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y'} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2} \cdot \sqrt{2gy}} \cdot \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2} \cdot \sqrt{2gy}} \cdot \frac{dy}{dx} = \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2gy} \cdot (1+y'^2)^{3/2}} y'' - \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2} \cdot 2y \sqrt{2gy}};$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{-2y\sqrt{2gy}};$$

perciò, dopo aver sostituito nell'equazione di Lagrange e semplificato, si ottiene l'equazione differenziale della brachistocrona:

$$[1] \quad 2yy'' + y'^2 + 1 = 0.$$

Huygens per primo dimostrò (intuì?) che la brachistocrona è un arco di cicloide.

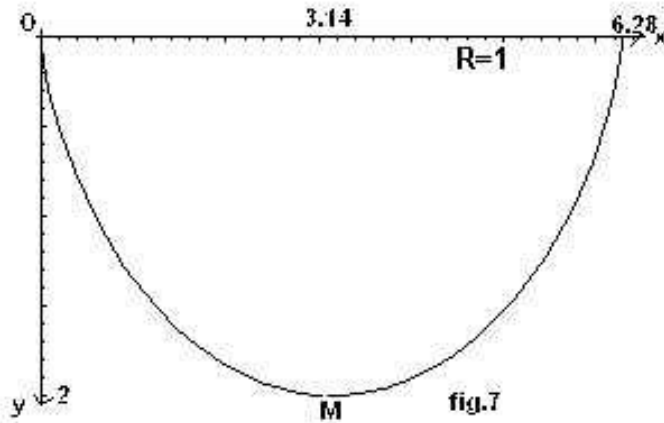
Si tratta ora di dimostrare che la [1] è veramente l'equazione differenziale della cicloide.

Equazione della cicloide.

Le equazioni parametriche (del primo arco) della cicloide sono:

$$x = R(\theta - \text{sen } \theta), \quad y = R(1 - \text{cos } \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

(R è il raggio della circonferenza, un punto della quale descrive la cicloide quando la circonferenza rotola senza strisciare su una retta. Vedi fig.7, in cui ho posto R=1).



$$\frac{dx}{d\theta} = R(1 - \text{cos } \theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = R \text{sen } \theta, \quad \frac{dy}{dx} = y' = \frac{\text{sen } \theta}{1 - \text{cos } \theta} = \text{cotg } \frac{\theta}{2}.$$

Da $y' = \text{cotg}(\theta/2)$, segue $\theta = 2 \text{ arccotg } y'$. Inoltre, siccome x è funzione monotona crescente di θ , essa è invertibile e da $dx/d\theta = R(1 - \text{cos } \theta) = y$, segue

$$[2] \quad y \frac{d\theta}{dx} = 1$$

Analogamente, da $\theta = 2 \text{ ArcCotg } y'$, segue

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{2}{1 + y'^2} \frac{dy'}{dx} = \frac{-2y''}{1 + y'^2},$$

e, sostituendo nella [2], si ottiene l'equazione differenziale della cicloide, che coincide con la [1], equazione della brachistocrona:

$$[3] \quad \frac{-2yy''}{1 + y'^2} = 1, \quad \Leftrightarrow \quad 2yy'' + y'^2 + 1 = 0.$$

Confronti sui tempi di discesa per varie curve.

Si considerano ora quattro percorsi dal punto O(0,0) al punto M(2r, πr), più in basso di O, se, come già fatto, orientiamo l'asse delle y verso il basso: l'arco di cicloide, l'arco di parabola di vertice M, un percorso ad "L" e il segmento OM.

1°) Arco di cicloide.

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{R\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}}{\sqrt{2gy}} d\theta = \sqrt{\frac{R}{g}} d\theta;$$

$$t_1 = t_{OM} = \int_0^\pi dt = \sqrt{\frac{R}{g}} \pi.$$

2°) Arco di parabola con vertice in M:

$$y = \frac{4x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi^2 R}$$

$$t_2 = t_{OM} = \int_0^{\pi R} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{4}{\pi} - \frac{4x}{\pi^2 R}\right)^2}{2g\left(\frac{4x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi^2 R}\right)}} dx = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^\pi \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{4}{\pi} - \frac{4x}{\pi^2}\right)^2}{2\left(\frac{4x}{\pi} - \frac{2x^2}{\pi^2}\right)}} dx.$$

3°) Curva ad "L".

La curva ad "L" è costituita dal segmento verticale OH e dal segmento orizzontale HM, dove H ha coordinate (πR, 2R).

Con calcoli elementari si trova:

$$t_{OH} = \sqrt{\frac{2.OH}{g}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}}; \quad t_{HM} = \frac{\pi R}{v_H} = \frac{\pi R}{2\sqrt{gR}} = \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{\pi}{2} \quad \text{e infine:}$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{R}{g}} \left(2 + \frac{\pi}{2}\right).$$

4°) Segmento OM.

Detto α l'angolo tra l'asse x e il segmento,

$$t_4 = t_{OM} = \sqrt{\frac{2.OM}{g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{4R}{g \sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{R}{g}} \sqrt{\pi^2 + 4}.$$

Valori numerici.

Posto R=1, g=1, risulta:

- 1° Per la cicloide, t(OM) = 3.14.
- 2° Per la parabola, t(OM) = 3.28.
- 3° Per la curva ad "L", t(OM) = 3.57.
- 4° Per il segmento, t(OM) = 3.72.

Siccome il calcolo del tempo lungo il cammino parabolico è laborioso, riporto l'integrale e il valore approssimato calcolato con "Mathematica".

```

Integrate[Sqrt[(1 + (4/Pi * (1 - x/Pi))^2) / (4 * x/Pi * (2 - x/Pi))], {x, 0, Pi}]

      16 (1 - x/Pi)^2
      1 + -----
             Pi^2
Sqrt[Pi] Integrate[Sqrt[-----], {x, 0, Pi}]
             x (2 - x/Pi)

-----
                2

N[Integrate[Sqrt[(1 + (4/Pi * (1 - x/Pi))^2) / (4 * x/Pi * (2 - x/Pi))], {x, 0, Pi}]]

3.27633

Tempo del cammino parabolico da O (0, 0) ad M (pi * R, 2 * R), fatto g = 1, R = 1.
(M è il vertice. Immaginare l'asse delle y verso il basso).
Equaz. della parabola : Y = -2x^2 / (pi^2 R) + 4x / pi
    
```

Un'altra notevole proprietà della cicloide: il tautocronismo.

Sull'arco OM della cicloide (vedi fig. 7) si prendano due punti P₀ e P₁, di ordinata rispettivamente y₀ < y₁ e velocità 0 e v₁. Sia poi P un punto intermedio generico, di ordinata y e velocità v.

La conservazione dell'energia fornisce

$$mg(y - y_0) = \frac{1}{2}mv^2$$

Ovvero, ricordando le equazioni della cicloide,

$$gR(\cos\theta_0 - \cos\theta) = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2} \frac{dx^2 + dy^2}{(dt)^2} = \frac{1}{2} \frac{(2R \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot d\theta)^2}{(dt)^2} \text{ e quindi}$$

$$dt = \frac{2R \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot d\theta}{\sqrt{2gR(\cos\theta_0 - \cos\theta)}} = \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cdot d\theta}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Integrando da P₀ a P₁, posto

$$\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right) = k \quad \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = k \cos \xi$$

si ottiene il tempo di discesa da P_0 a P_1 :

$$t(P_0P_1) = \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot 2 \cdot \text{ArcCos}\left(\frac{\cos \frac{\theta_1}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2}}\right).$$

E' notevole il fatto che, se $P_1=M$, cioè se $\theta_1 = \pi$, il tempo di discesa da P_0 ad M è indipendente da P_0 :

$$t(P_0M) = \sqrt{\frac{R}{g}} \cdot 2 \cdot \text{ArcCos}0 = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

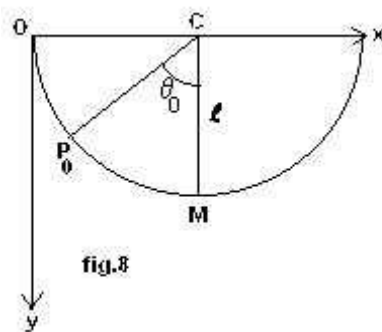
In questo consiste il tautocronismo della cicloide. In particolare, il periodo di oscillazione da P_0 (anche da O) al suo simmetrico rispetto alla verticale per M e ritorno vale

$$T = 4t(P_0M) = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}}$$

come un pendolo semplice circolare, di lunghezza $l=4R$, che facesse piccole oscillazioni. Se è vero, il raggio di curvatura ρ della cicloide in M deve essere $4R$. Così infatti risulta:

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - x''y'|} \quad (\text{per } \theta = \pi) = \dots = 4R.$$

Naturalmente, il periodo di un pendolo circolare dipende dall'angolo di oscillazione θ_0 .



Il tempo di caduta da P_0 ad M risulta (vedi [1]):

$$[4] \quad t(P_0M) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \text{sen}^2 \frac{\theta_0}{2} + \frac{9}{64} \text{sen}^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots\right) \text{ e in particolare, per } \theta_0 = \frac{\pi}{2} :$$

$$t(OM) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{9}{256} + \dots\right).$$

Se $l=4R$, $R=g=1$, $t(OM) = 3.64$, maggiore di 3.14, che è il tempo di caduta lungo la cicloide. Si può obiettare che per un cerchio di raggio $4R$ la lunghezza del quadrante OM è $4R \cdot \pi/2$, cioè $6.28R$, mentre l'arco OM di cicloide è lungo soltanto $4R$. E' giusto pertanto considerare un arco di cerchio P_0M lungo $4R$, il che significa un angolo al centro $\theta_0 = 1$ radiante: vedi fig. 8). In tal caso dalla formula [4] si ricava $t(P_0M) = 3.34$ che è pur sempre maggiore di 3.14. Si potrebbe ancora obiettare che in P_0 la pendenza è minore che in O e pertanto la velocità cresce più lentamente che non partendo da O . Si prenda allora un arco di cerchio OP_0 lungo $4R$, il che significa un angolo al centro $OCP_0 = \alpha_0 = 1$ radiante. (α_0 è il complementare di θ_0 : vedi fig. 8). Posto al solito $v(O) = 0$, v la velocità del generico punto P individuato dall'angolo α , risulta

$$v = \sqrt{2gl \operatorname{sen} \alpha}, \quad dt = \frac{ds}{v} = \frac{l d\alpha}{v} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen} \alpha}}$$

e quindi

$$t(OP_0) = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\alpha_0} \frac{d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sen} \alpha}}, \quad \text{e posto } \operatorname{sen} \alpha = t^2, \quad t(OP_0) = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\sqrt{\operatorname{sen} \alpha_0}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

$$= \sqrt{\frac{2l}{g}} \left(\tau + \frac{1}{8} \tau^5 + \frac{3}{72} \tau^9 + \dots \right), \quad \text{essendo } \tau = \sqrt{\operatorname{sen} \alpha_0},$$

avendo sviluppato la funzione integranda in serie binomiale.

Posto $l=4R$, $R=g=1$, si ottiene, per $\alpha_0 = 1$ radiante,

$$t(OP_0) = \sqrt{8} \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \dots \right) \cong 3.29,$$

in ogni caso maggiore di 3.14.

Conclusioni (quasi) metafisiche.

La scoperta che le leggi della fisica sono derivabili da un principio di minimo (in generale di estremo, come abbiamo visto), principio del minimo tempo con Fermat (1601-1665), di minimo sforzo con Maupertuis (1698-1759), che in seguito assumerà la veste definitiva di principio di minima azione con Hamilton (1805-1865), rafforzò quelle considerazioni mistico-religiose sulla "macchina del mondo", che erano già presenti in Newton e in Leibniz. In particolare Maupertuis, spirito profondamente religioso, pur muovendo in apparenza da una concezione materialistica della natura, giunge a conclusioni finalistiche e spiritualistiche: il principio del minimo sforzo rivela secondo lui la saggezza del Creatore che ha creato le leggi della fisica in modo che tutti i processi della natura si svolgano nel modo che richiede il minimo dispendio di energia. Se vogliamo, un *deus oeconomicus*, che però ogni tanto si concede il lusso di un massimo tempo o di una massima azione.

Non bisogna credere che considerazioni di tal fatta siano limitate a pochi scienziati e, in particolare, a studiosi delle scienze della natura; per portare un esempio tratto dalle concezioni di un grande ma-

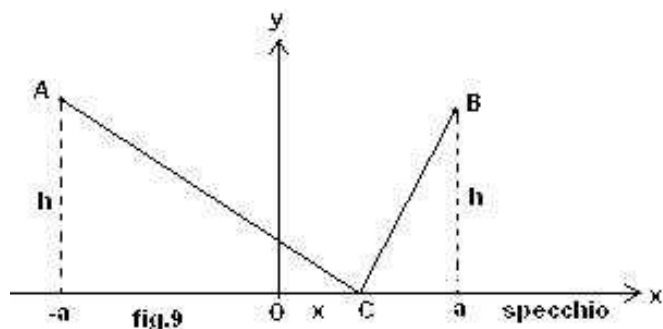
tematico quale Eulero (1707-1783), a proposito della serie " 1-1+1-1+1-1...", che in realtà è indeterminata come sappiamo dopo Cauchy (1789-1857), egli procede nella somma in tre modi diversi e trova tre risultati diversi: 0, 1, 1/2. Ottiene 0 associando ogni termine col successivo, 1 isolando il primo addendo e poi associando come prima, 1/2 dallo sviluppo della serie geometrica $1-x+x^2-x^3+\dots=1/(1+x)$ e ponendo poi $x=1$. Naturalmente per le serie che non siano assolutamente convergenti non vale la proprietà associativa, né vale l'uguaglianza che porta al terzo risultato, se la serie non è uniformemente convergente. Eulero non conosceva queste proprietà e dai suoi tre risultati non concluse che qualcosa non funzionava, bensì arrischiò un possibile indizio della trinità divina.

Queste commistioni tra scienza e fede, anche se più rare, non mancano neanche adesso, anche tra scienziati di gran fama (penso a Zichichi, per fare un esempio italiano). Non ho intenzione di dare un giudizio di merito, perché tutte le opinioni sono degne di rispetto. Io ritengo che, se possibile, occorre giustificare le leggi della natura nell'ambito di una concezione razionale del mondo (dico se possibile, perché non sappiamo tutto, fortunatamente).

In quest'ottica di razionalismo scientifico ritengo esemplare la giustificazione che del principio di minimo, limitatamente alla riflessione della luce (ma il discorso si può estendere alla rifrazione e in generale al principio della minima azione), dà Richard Feynman [6].

Il premio Nobel americano espone la sua argomentazione nel linguaggio del modello statistico (fotonico) della luce, ma io esporrò le stesse idee nel modello ondulatorio che è più familiare.

Considero un punto B e una sorgente A, simmetrica di B rispetto all'asse y, che invia un ristretto fascio (monocromatico) nel punto variabile C su uno specchio disposto lungo l'asse x. (vedi fig.9).



Dato che il mezzo è supposto omogeneo, il tempo è proporzionale al cammino AC+CB.

$$t = \frac{1}{v} [\sqrt{(a+x)^2 + h^2} + \sqrt{(a-x)^2 + h^2}]$$

e il tempo t è minimo per $x=0$ ($C \rightarrow O$). Si noti che t tende all'infinito per $x \rightarrow$ infinito; perciò studiamo l'andamento di t per x nell'intervallo $[-a, a]$.

(vedi fig.10, nella pagina seguente, in cui si è posto $a=1, h=1$; in ordinata il tempo).

Fissato un intervallo molto piccolo δx sullo specchio, detta $\delta\phi$ = la differenza di fase di due raggi che si riflettono nei punti di ascissa x e $x'=x+\delta x$ andando da A a B, si avrà:

$$\psi_1 = A \cdot \cos(\omega t), \psi_2 = A \cos(\omega t + \delta\phi), \psi = \psi_1 + \psi_2 = 2A \cos(\delta\phi/2) \cos(\omega t + \delta\phi/2), \text{ essendo } \delta\phi = \omega(t' - t).$$

L'ampiezza dell'onda nel punto B è perciò $2A \cdot \cos \delta\phi/2$. (Qui A è l'ampiezza d'onda).

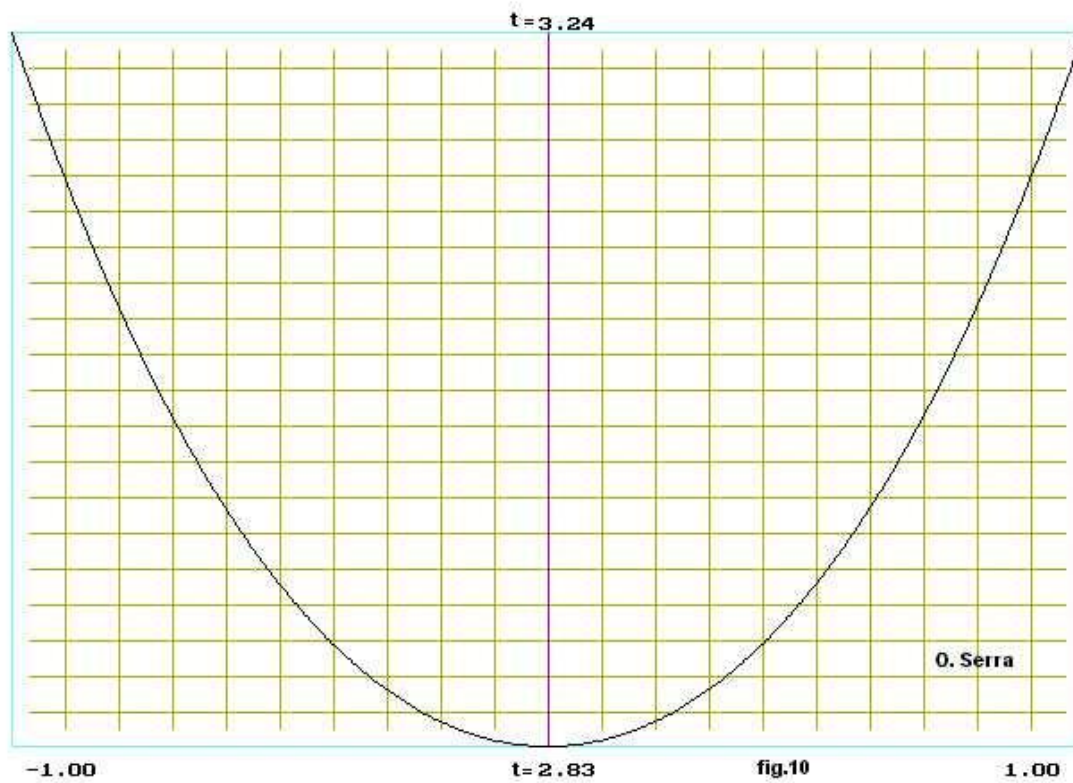
Se x è vicino a 0, siccome in vicinanza del minimo t varia molto poco, $\delta\phi$ è piccola e l'ampiezza di ψ in B è 2A. (forte luminosità in B).

Se invece C è lontano da O, a parità di δx , δt sarà grande e $\delta\phi = n\pi$, con n grande. Ciò comporta

$$\frac{\delta\phi}{2} \approx n \frac{\pi}{2} \Rightarrow \psi \approx 0.$$

L'intensità della luce riflessa (in B) è praticamente zero. (Interferenza distruttiva).

Che cosa fa un fotone che parte da A e colpisce lo specchio in C? si chiede Feynman. Fa quel che gli pare è la sorprendente risposta dell'elettrodinamica quantistica. Può benissimo raggiungere B, anche se si riflette in un punto C molto lontano da O. Una prova sperimentale si ottiene "grattando" lo specchio in strisce estremamente sottili (confrontabili con la lunghezza d'onda associata ai fotoni), in modo che strisce riflettenti vicine diano luogo a differenze di fase molto piccole sul cammino $AC+CB$. In tal caso l'interferenza è costruttiva e in B ci sarà luce (elevata probabilità di arrivo di un fotone). Questo dispositivo non è affatto chimerico, è realizzato da tempo, funziona egregiamente e si chiama spettroscopio a reticolo per riflessione.



Bibliografia

- (1) Landau e Lifsic : MECCANICA
Boringhieri 1965.
- (2) Eligio Perucca: FISICA GENERALE E SPERIMENTALE, vol. II, tomo 1
UTET 1966.
- (3) Wolfgang Pauli: OTTICA E TEORIA DEGLI ELETTRONI
Boringhieri 1964.
- (4) Fleury e Mathieu: FISICA GENERALE E SPERIMENTALE, 4° vol. Immagini ottiche
Zanichelli 1966.
- (5) Halliday e Resnick: FISICA, Parte seconda Elettromagnetismo - Ottica
Editrice Ambrosiana, Milano, 1970.
- (6) Richard Feynman: QED - La strana teoria della luce e della materia
Adelphi 1992.