**Ottavio Serra ***
**La matematica di Pitagora**

Di Pitagora (571 ? – 497 ? a.C.) possediamo poche e forse inattendibili notizie, che ce lo presentano come un saggio che da Samo, in Ionia, per ragioni non chiare (forse temendo persecuzioni politiche da parte del tiranno Policrate, o la minaccia di un'invasione persiana, dato che Ciro aveva già assoggettato la Lidia nel 546 a.C.) si trasferì intorno al 530 a.C. nel sud d'Italia, l'antica Magna Grecia, e nella città di Crotone fondò una scuola, simile a una setta religiosa, entro cui vigevano regole ferree, che prevedevano pene severe per i trasgressori. Pitagora all'interno di questa scuola deteneva il potere assoluto di scegliere gli allievi per trasmettere loro il suo sapere, di classificarli nelle categorie curricolari degli ***acusmatici*** (dal verbo $\alpha\kappa o\upsilon'\omega$, udire), ossia gli iniziati a cui per la durata di cinque anni veniva concesso solo ed esclusivamente di ascoltare le lezioni, senza interloquire e senza nemmeno vedere la persona del maestro, e dei ***matematici*** (dal verbo $\mu\alpha\nu\theta\alpha'\nu\omega$, imparare), quei pochi che, dopo aver dimostrato di essere in grado di apprendere e di mantenere il silenzio mistico, potevano partecipare attivamente alla vita della scuola, essendo stati messi al corrente della dottrina vera e propria, segreta e insindacabile.

Probabilmentea la scuola di Crotone era strutturata sull'esempio delle comunità orfiche e delle sette religiose d'Egitto e di Babilonia, terre che Pitagora aveva conosciuto in occasione dei suoi precedenti viaggi di studio. La scuola di Crotone ereditò dal suo fondatore la dimensione misterica e la passione per la matematica, l'astronomia, la musica e la filosofia.

Le dottrine filosofiche della scuola, per i vincoli di segretezza vigenti in essa, non si diffusero all'esterno e furono quindi riprese solo molti secoli dopo.
Però singoli pensatori ebbero contatti con la cultura greca e il pitagorismo influenzò profondamente la filosofia di Platone.

Durante la sua esistenza, la scuola fu coinvolta nelle vicende politiche della città di Crotone: nel 508 a,C. Pitagora fu addirittura costretto ad abbandonarla e a rifugiarsi a Metaponto (dove secondo alcune ricostruzioni sarebbe morto).

La figura di Pitagora è avvolta nella leggenda, forse anche per la venerazione di cui lo facevano oggetto i discepoli, che attribuivano al maestro tutti i risultati realizzati nella scuola. Per questo motivo Aristotele parla genericamente di scoperte e dottrine dei Pitagorici (vedi passo citato più avanti).

Tra i primi pitagorici ricordo Ippaso da Metaponto, Filolao da Crotone, Archita da Taranto. Alcuni ritengono Filolao originario di Taranto, forse perché fu maestro di Archita. Più tardi matematici pitagorici furono attivi nell'Accademia di Platone, come Timeo, Teeteto di Atene e Menone, ai quali sono intitolati altrettanti dialoghi, e ai quali forse Platone è debitore della teoria della metempsicosi (vedi il *Menone*) e della sua passione per la matematica.

Ippaso (attivo verso il 400 a.C.) da Metaponto, Archita (428-365 a.C.) da Taranto e Timeo da Locri probabilmente furono incontrati da Platone nel suo viaggio in Magna Grecia verso il 388 a.C.

A Teeteto sono attribuiti studi sui poliedri regolari e forse addirittura la scoperta dell'ottaedro e dell'icosaedro. Per questi studi e scoperte avvenute nell'ambito dell'Accademia, i poliedri regolari furono detti solidi platonici e furono associati ai quattro elementi: fuoco – tetraedro, aria – ottaedro, acqua – icosaedro, terra – esaedro o cubo. Al quinto poliedro regolare, il dodecaedro, Aristotele in seguito associò l'etere cosmico, la *quinta essenza*, appunto.

Lo studio sistematico dei poliedri regolari fu poi intrapreso da Euclide nel XIII° Libro degli *Elementi*.

Filolao (contemporaneo di  Patone: 428-348 a.C.) morto verso il 390, fu il primo pitagorico a lasciare opere scritte.

La sua concezione astronomica si rifà a quella di Pitagora e la completa. Egli immagina che i cinque pianeti (gli *erranti*) Mercurio, Venere, Marte, Giove, Saturno, più Sole, Luna, Terra, Antiterra e Cielo delle stelle fisse ruotino intorno al fuoco centrale da ovest a est. Si noti che i corpi rotanti sono stati portati a 10, numero mistico per il pitagorismo. Questa concezione è ingegnosa, ma priva di fondamenti osservativi; tuttavia, anche se oscurata dalla filosofia aristotelica e dall'astronomia di Tolomeo, restò presente nel corso dei secoli e forse aprì la strada ad Aristarco e infine a Copernico. L'astronomia di Filolao influenzò l'ultimo Platone a tal punto da fargli dichiarare che l'opinione contraria alla rotazione della Terra *fosse ingrata agli Dei e appena perdonabile alla debolezza degli uomini che non partecipano all'intelligenza divina* (da Schiaparelli, "I precursori di Copernico").

Filolao  si occupa di aritmetica e porta avanti gli studi di Pitagora. Introduce i numeri triangolari, cioè i numeri ciascuno dei quali è la somma dei precedenti, uno incluso, triangolari perché si possono disporre in una configurazione geometrica di triangoli equilateri: 1, 3, 6, 10, e così via. Si noti il quarto numero della successione, il numero 10 della perfezione cosmica. Ma anche il 6 era importante, perché il primo numero *perfetto* (vedi oltre).

L'altra successione esplorata è quella dei quadrati: 1, 4, 9, 16,… ciascuno dei quali è la somma dei primi **n** numeri dispari.

A Filolao si deve anche l'introduzione della proporzione armonica a/b = (a-b)/(b-c), da cui segue che b è medio proporzionale tra a e c.

Pare che i pitagorici, probabilmente quelli attivi presso l'Accademia di Platone, abbiano scoperto la **sezione aurea,** studiando il decagono e il pentagono regolare. Il lato del pentagono è la sezione aurea della diagonale, le diagonali limitano a loro volta un altro pentagono regolare e così via. Il pentagono intrecciato, o pentagramma, che così si ottiene, appariva dodato di proprietà mistiche ed era usato dai pitagorici come segno di riconoscimento.

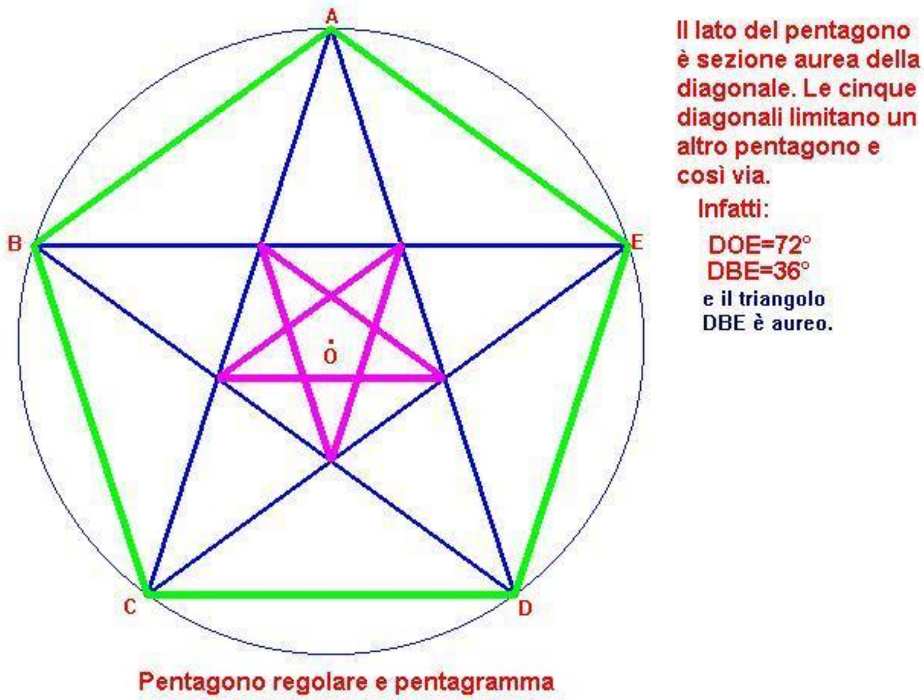



**Figura 0**

Su questo argomento e sul rapporto tra sezione aurea e numeri di Fibonacci si veda il mio articolo *L'Infinito in matematica* sulla rivista ***Orizzonti*** del Liceo classico Gioacchino da Fiore di Rende, anno V, N° 2, maggio 2005.

## I. I numeri figurati e la concezione del mondo.

Mentre i filosofi ionici avevano ricercato il principio delle cose in una sostanza materiale (acqua, aria, o altro), i pitagorici l'avevano trovata nel numero.

Scrive Aristotele (Metafisica, I, 5):

*I cosiddetti pitagorici avendo cominciato ad occuparsi di ricerche matematiche ed essendo grandemente progrediti in esse, furono condotti da questi loro studi ad assumere come principi di tutte le cose esistenti quelli di cui fanno uso le scienze matematiche. E poiché i primi che qui s'incontrano sono per natura i numeri, sembrò loro di ravvisare in questi molte più analogie con ciò che esiste e avviene nel mondo di quante se ne possono trovare nel fuoco, nella terra e nell'acqua [...]. Avendo poi riconosciuto che le proprietà e le relazioni delle armonie musicali corrispondono a rapporti numerici, e che in altri fenomeni naturali si riscontrano analoghe corrispondenze coi numeri, furono tanto più indotti ad ammettere che i numeri siano gli elementi di tutte le cose esistenti e che tutto il cielo sia proporzione ed armonia.*

Secondo Filolao il numero era anche figura geometrica e a successioni di numeri i pitagorici associavano in modo suggestivo delle figure.

Così, la successione delle somme dei numeri dava luogo ai così detti numeri triangolari, la successione delle somme dei numeri dispari generava i numeri quadrati e così via, partendo in ogni caso dall'unità per aggiunta dello ***gnomone.***

Euclide definisce lo gnomone con queste parole: " *in ogni parallelogramma, ciascuno deli parallelogrammi attraversati dalla diagonale, insieme con i due complementi, si dice* ***gnomone*** (Elementi, Libro II, Termini, 2).

Pare che l'uso dello gnomone ( γνω'μων , dal verbo γιγνω'σκω, conoscere) sia stato importato in Grecia dalla Mesopotamia da parte di Anassimandro o di Anassimene (VI secolo a.C.) e che il nome indicasse inizialmente una semplice asta perpendicolare al terreno per misurare il tempo in base all'ombra del Sole. Nel caso di un rettangolo ha più o meno l'aspetto di una **L,** come la squadra in blu riportata nella **Figura 1**.

Erone in seguito generalizzerà il concetto, dicendo che lo gnomone rappresenta qualunque ente, *numero o figura*, che, aggiunto a un ente precedente, lo lascia immutato in forma, simile a sé.

Particolarmente importante era per i pitagorici il quarto numero triangolare , il 10, τετρακθυ'ς (*quarto numero quadrato*), per il seguente motivo: si parte dal punto monade **1**, due punti danno la linea (segmento) la cui misura unidimensionale è la lunghezza, tre punti danno la superficie (triangolo) la cui misura bidimensionale è l'area, quattro punti danno lo spazio (tetraedro) la cui misura tridimensionale è il volume. Siccome non si può andare oltre (lo spazio ha tre dimensioni), questi quattro numeri descrivono l'armonia del cosmo e la loro somma, **10**, è perciò il sacro numero, la sacra quaterna, sul quale i pitagorici giuravano, come un fedele sul suo dio.

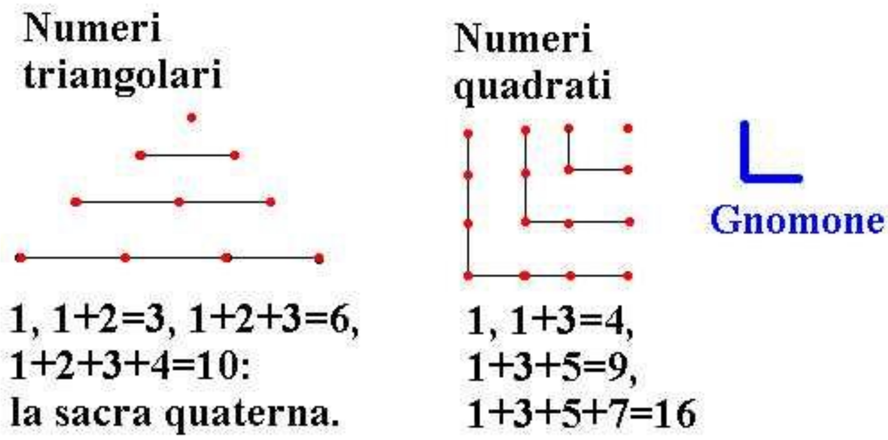



**Figura 1**

I pitagorici conoscevano anche altri tipi di numeri poligonali. Nella figura 2 sono riportati i primi tre numeri pentagonali. Dai disegni si evince qual è lo gnomone nei vari casi.

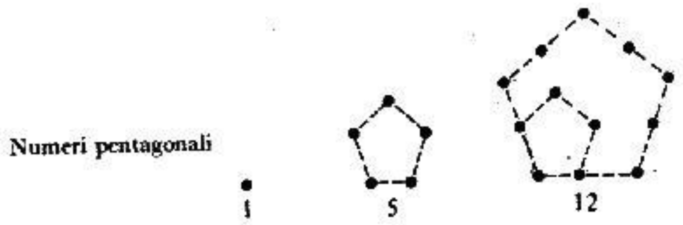



**Figura 2**

I numeri triangolari corrispondono alla successione dei numeri naturali, *progressione aritmetica di ragione 1*; la somma dei primi **n** è, con notazione moderna, n.(n+1)/2.

I numeri quadrati costituiscono la successione dei numeri dispari, progressione aritmetica di ragione 2: la somma dei primi **n** è $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$.

I numeri pentagonali formano la progressione aritmetica di ragione 3; la somma dei primi **n** termini è $1+4+7+\ldots+(3n-2 = n.(3n-1)/2$.

I pitagorici cercarono costantemente significati riposti nelle strutture dei numeri. Essi furono i primi a imbattersi nei cosiddetti *numeri perfetti*, numeri che sono uguali alla somma dei loro divisori, inclusa l'unità. Il più piccolo è il numero 6 = 1+2+3, che è anche un numero triangolare, il successivo è 28 = 1+2+4+7+14.

L'argomento è stato ripreso da Euclide, che diede una formula per ottenere numeri perfetti (pari):

*Se, a partire dall'unità, sono dati quanti si vogliano numeri in proporzione* duplicata*, e la loro somma è un numero primo, il prodotto di questa somma per l'ultimo dei numeri dati è un numero perfetto.* (Elementi, Libro IX, proposizione 36). Con notazione moderna: Se $S_n=1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}$ è un numero primo, allora $2^{n-1}.S_n$ è perfetto. Euclide procede nella dimostrazione per via geometrica; per noi è molto più semplice seguire un procedimento aritmetico. (Si noti che $S_n$ è la somma di una progressione geometrica di ragione 2 e vale $2^n$-1).

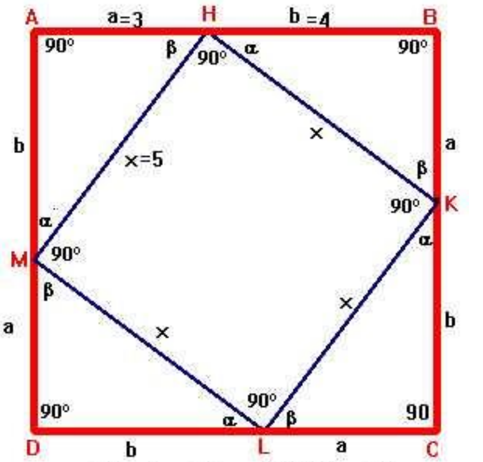
La generazione di numeri perfetti fu ripresa nel '700 da Eulero, il quale dimostrò che la condizione sufficiente di Euclide è anche necessaria, perciò la formula di Euclide dà <u>tutti</u> i numeri perfetti pari. (*A tutt'oggi non si sa se esistano numeri perfetti dispari*).

Queste nozioni aritmetiche furono applicate dai pitagorici anche allo studio dei suoni e li portarono alla concezione che il cosmo fosse armonia musicale e che lo spazio avesse una struttura discreta, come discreta è la successione dei numeri, che un segmento fosse la somma (unione) dei suoi punti, che perciò due segmenti dovessero ammettere in ogni caso una comune misura, dovessero essere ***commensurabili.*** Ma la scoperta del teorema che porta il nome di Pitagora demolì questa semplice e grandiosa concezione aritmetica del mondo.

## II. Il Teorema di Pitagora.

E' probabile che il teorema più famoso della matematica fosse conosciuto, almeno in casi particolari, da tempi molto anteriori al V secolo.

Secondo Biot (journal Asiatic, 1841) l'astrologo cinese Chòu (zio dell'imperatore Wu) conosceva il teorema, forse nel caso dei lati 3, 4, 5, intorno al 1100 a.C., anche se la figura 3, che illustra il caso, pare sia stata aggiunta posteriormente. (*Le annotazioni alla figura sono state inserite da me per chiarezza*). Purtroppo i cinesi avevano la tendenza a retrodatare i risultati delle loro scoperte, per una forma di sciovinistico rispetto degli antenati, perciò le loro datazioni sono poco attendibili.




Cho'u, Cina 1100 a.C. **Figura 3**

Infine, l'indiano Apastampa (risalente al V secolo, secondo lo storico Bur) nel *Sulbasutra* enuncia il teorema in generale, rifacemdosi ai lati e alla diagonale di un rettangolo e menziona qualche caso particolare come 5, 12, 13.

Anche Platone si occupa di un problema imparentato col teorema di Pitagora, precisamente della duplicazione del quadrato, nel dialogo intitolato a Menone. Il suo scopo era di sostenere la tesi che imparare significa ricordare, nel contesto della teoria della metempsicosi.

Dal dialogo ***Menone*** riporto la figura originale con la quale Socrate fa ricordare allo schiavo di Menone che il quadrato doppio è quello che ha per lato la diagonale, non il lato doppio. Da qui discende un caso particolare del teorema di Pitagora, il caso del triangolo rettangolo isoscele bcd.

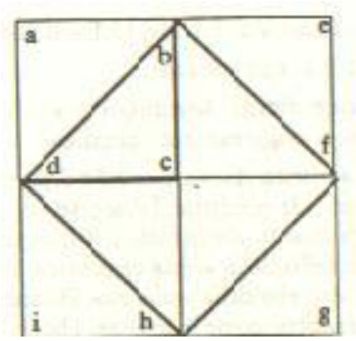



**Figura 4**

Euclide dimostra il teorema (è la prima dimostrazione nel senso moderno del teorema di Pitagora) nella proposizione 47 del Libro I degli *Elementi*, utilizzando la teoria dell'equivalenza: il quadrato costruito su un cateto e il rettangolo avente i lati rispettivamente uguali all'ipotenusa e alla proiezione del cateto sull'ipotenusa sono uguali (equivalenti) perché ordinatamente uguali a due triangoli uguali.

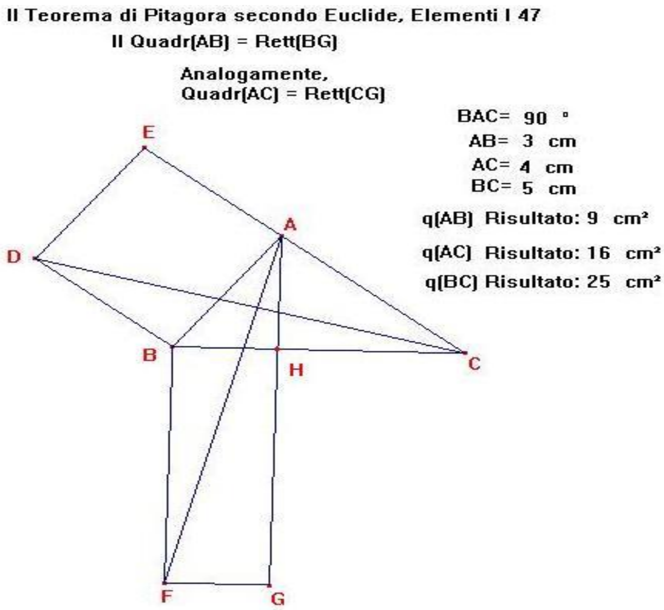



**Figura 5**

Ci si potrebbe chiedere perché Euclide non abbia aspettato la teoria della similitudine, che avrebbe reso più semplice la dimostrazione del teorema. Che un triangolo rettangolo sia simile ai due triangoli in cui l'altezza relativa all'ipotenusa lo divide è dimostrato nella proposizione 9 del VI Libro.

Il motivo è che Euclide aveva bisogno della teoria generale delle proporzioni di Eudosso, che svilupperà nel V Libro degli *Elementi*, per non doversi limitare a rapporti di segmenti commensurabili, poichè dal teorema di Pitagora segue l'esistenza di segmenti incommensurabili.

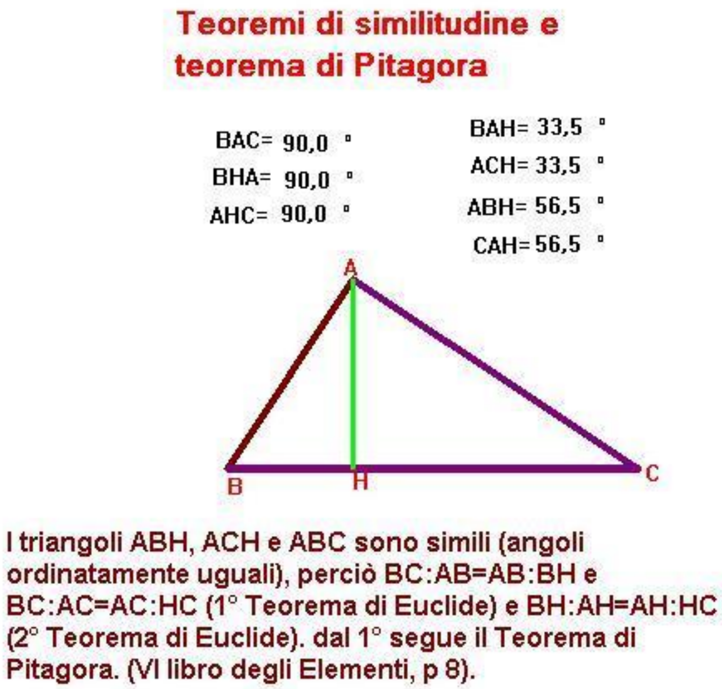


**Figura 6 ( Cabri)**

## III. La scoperta dei numeri irrazionali.

Dalla considerazione di un quadrato (come quello del Menone) si ricava che il quadrato della diagonale è il doppio del quadrato (del lato). Perciò il rapporto tra la diagonale e il lato non può essere il rapporto di due numeri. Ammesso che il rapporto di due numeri(interi) si possa considerare un numero di cui è lecito parlare, un numero ***dicibile***, *ρητο'ς*, un rapporto come quello tra diagonale e lato del quadrato deve essere un numero di cui è proibito parlare, uno scandalo, un numero *`αρητο'ς*, esecrato, indicibile in pubblico.

Come giunsero i pitagorici alla scoperta degli irrazionali?
Il ragionamento compiuto da Pitagora (dai pitagorici) si può ricostruire da un brano di Aristotele (Primi Analitici, Libro I, Capitolo 23, 41a, 25…). Ecco le sue parole:

"*Una prova di questo tipo,* (mediante riduzione all'assurdo) *ad esempio,è quella che stabilisce l'incommensurabilità della diagonale, fondandosi sul fatto che quando viene supposta la commensurabilità i numeri dispari risultano uguali ai numeri pari.* ).

Con l'ausilio della figura 7 la dimostrazione seguente, con notazione moderna, diventa semplice.

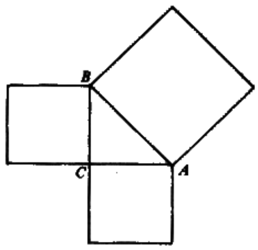



**Figura 7**

Dato un triangolo ABC rettangolo in C, supponiamo, seguendo la Teoria Monadica, che la diagonale AB ed il lato AC siano commensurabili: ne segue che un sottomultiplo comune ai due segmenti AC e AB entrerà m volte in AC ed n volte in AB, dove m e n devono prendersi primi fra loro riducendoli ai minimi termini.
$AC / AB = m / n$
Ora, essendo $AC = BC$, per il teorema di Pitagora si ha che:
$AB^2 = 2AC^2$ e quindi $m^2 = 2n^2$.
Si deduce che $m^2$ è pari, perciò anche m è pari. Posto $m=2p$ ,si avrà: $m^2 = 2n^2$, $4p^2 = 2n^2$, $2p^2= n^2$.

Risulta che $n^2$, e quindi n, è pari. Ma m ed n essendo primi tra loro, non possono essere entrambi pari, almeno uno è dispari. L'ipotesi che AB e AC siano commensurabili conduce quindi ad una contraddizione.

Segue che la radice qudrata di 2 è un numero indicibile (*`αρητο'ς*) o non esprimibile con un rapporto, perciò irragionevole (*α'λογος*), da cui il nostro *irrazionale.*

Nell'Accademia erano conosciuti altri numeri irrazionali, fino alla radice quadrata di 17, per merito di Teeteto, come si legge nel dialogo omonimo. Seguendo lo schema aritmetico indicato da Aristotele per la radice quadrata di 2, è facile oggi dimostrare l'irrazionalità fella radice $n^{ma}$ di tutti i numeri primi e poi di tutti i numeri (naturali) che non siano potenze $n^{me}$ perfette.

Euclide, seguendo la sua impostazione rigorosamente geometrica, dimostra l'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato, mostrando che se dalla diagonale si toglie il lato, si ottiene una figura simile sulla quale si può ripetere l'operazione, in un processo senza fine.

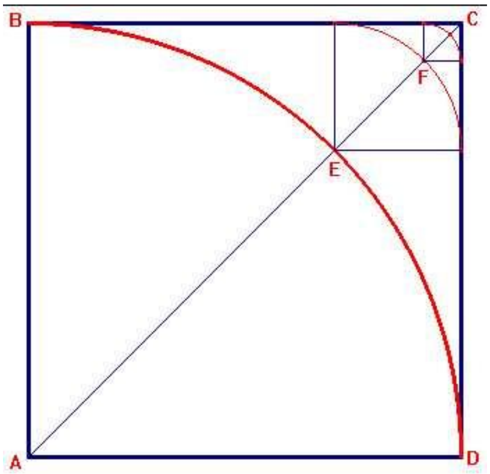



**Figura 8**

**Nota.** Da questa figura 8 l'incommensurabilità tra diagonale e lato del quadrato segue indipendentemente dal teorema di Pitagora, che però è necessario per stabilire che il loro rapporto è $\sqrt{2}$. Viceversa, dalla figura 4 (del *Menone*) segue che il rapporto tra diagonale e lato del quadrato è $\sqrt{2}$ senza bisogno del teorema di Pitagora, che viceversa segue dalla figura stessa nel caso particolare di cateti uguali.

## IV. Terne pitagoriche e aritmogeometria.

Il fatto che non tutti i triangoli rettangoli abbiano lati commensurabili, anzi questo è un caso eccezionale, spinse i pitagorici a investigare quali siano quelli i cui lati siano misurati da numeri (interi).

Ottennero varie terne come (3, 4, 5); (5, 12, 13) e certamente altre. Probabilmente furono guidati dai numeri *quadrati*. Infatti per tali numeri, se $n^2$ è l'$n^{mo}$, il prossimo si ottiene aggiungendo n monadi in orizzontale in basso, n verticali a sinistra e una all'angolo: lo gnomone (vedi Figura 1).

Risulta perciò $(n+1)^2 = n^2 + (2n+1)$. Se (2n+1) è un quadrato, $\mathbf{(2n+1) = m^2}$, avremo che $n = (m^2 – 1)/2$ e quindi $[(m^2 + 1) / 2]^2 = [(m^2 - 1) / 2]^2 + m^2$.

Se m è dispari, si hanno terne pitagoriche intere, se m è pari terne frazionarie.

In seguito si trovò che

[1] $$(n^2 + m^2)^2 = (n^2 – m^2)^2 + (2nm)^2$$

e perciò si ottennero tutte le terne pitagoriche al variare di n ed m, con $n>m$, essendo $n^2 – m^2$ e 2nm le misure dei cateti, $n^2 + m^2$ la misura dell'ipotenusa.

La [1] si può ottenere con considerazioni di geometria cartesiana (aritmogeometria) nel modo seguente: detta X, Y, Z una terna pitagorica, cioè tale che $X^2 + Y^2 = Z^2$, si ponga $x=X/Z$, $y=Y/Z$ e si intersechi il cerchio di equazione $x^2+y^2=1$ con la retta $y=t(x+1)$, con $0<t<1$, passante per il punto A(-1,0) del cerchio. La retta interseca ulteriormente il cerchio in un punto del primo quadrante di coordinate $x=(1-t^2)/(1+t^2)$, $y=2t/(1+t^2)$.

Queste sono equazioni parametriche razionali del cerchio.

Se si sceglie t razionale, t=m/n, si ottiene $x = \frac{n^2 - m^2}{n^2 + m^2}$, $y = \frac{2nm}{n^2 + m^2}$ e da qui si ricava la [1].

Il teorema di Pitagora ha attraversato tutta la ricerca matematica fino all'ultimo teorema di Fermat: "*Non esistono terne pitagoriche (di numeri naturali) con esponente maggiore di 2*", cioè, se n>2, l'equazione $x^n + y^n = z^n$ non ammette soluzioni per x, y, z numeri naturali.

Il teorema di Fermat è uno dei teoremi aritmetici di enunciato molto semplice, ma di ardua dimostrazione. Molti sono ancora problemi aperti dell'aritmetica. La dimostrazione del teorema di Fermat impegnò generazioni di matematici per secoli e fu ottenuta solo nel 1995 dall'inglese Andrew Wiles, con metodi matematici estremamente sofisticati.

Per finire, mi piace riportare una dimostrazione del teorema di Pitagora dovuta al Presidente Americano Garfield (1831-1881) e basata sulla considerazione di un trapezio, anzicchè del solito quadrato. La dimostrazione segue in maniera elegante dalla scomposizione del trapezio rettangolo in tre triangoli rettangoli, come si vede dalla sottostante figura 9:

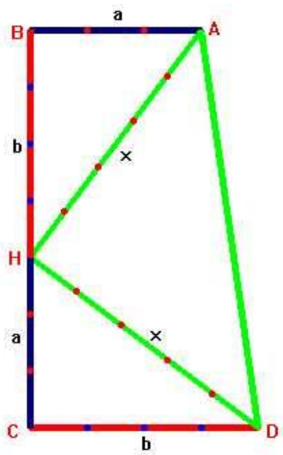



**Figura 9**

(Da Piergiorgio Odifreddi, Le Scienze, Luglio 2005, *Matematica presidenziale*).

*** Già docente presso il Liceo Scientifico Scorza di Cosenza**