

**Ottavio Serra \***

## **I problemi impossibili della geometria greca**

### **Introduzione.**

Risolvere un problema significa trovare il valore di certe grandezze incognite in funzione di certe altre grandezze note. Se le grandezze incognite si possano trovare o meno, dipende, oltre che dalla natura del problema, anche dagli strumenti che si è disposti a utilizzare.

I Greci affrontavano i problemi geometrici con metodi geometrici e, se possibile, limitando l'uso degli strumenti a quelli elementari: riga e compasso.

Da Cartesio in poi i moderni utilizzano anche strumenti algebrici e pertanto questioni inaccessibili ai Greci sono ora alla portata di tutti.

Per esempio, problemi risolubili con la sola riga si traducono in equazioni di primo grado e ammettono soluzioni nel campo di razionalità dei (coefficienti) dati, cioè operando sui dati con le quattro operazioni dell'aritmetica elementare. Si parla di equazioni e problemi lineari.

Il viceversa è falso: un problema lineare non sempre si può risolvere con la sola riga, occorre uno strumento più elevato. Per esempio, la ricerca del punto medio di un segmento AB richiede la riga a bordi paralleli o (se preferite sparare a cannonate su un passero) riga e compasso. Ciò perché il problema è di natura affine (richiede il tracciamento della parallela alla retta AB per un punto del piano comunque scelto: il punto medio di AB è il quarto armonico dopo A, B e il punto all'infinito di AB). Invece la retta passante per un punto e per l'intersezione di due rette che si tagliano fuori del foglio si può tracciare con la sola riga, perché il problema è di natura proiettiva (Configurazione di Desargues).

Problemi che si risolvono con riga e compasso sono di secondo grado, come per esempio la costruzione del segmento medio proporzionale tra due segmenti dati. In questi casi l'incognita cade nel campo euclideo dei dati, cioè, algebricamente, l'incognita si calcola con le quattro operazioni e con estrazioni di radici quadrate.

### **I problemi classici.**

Immedie e apparentemente semplici generalizzazioni di problemi di secondo grado si affacciarono presto all'investigazione dei Greci. Così, dopo aver duplicato il quadrato (il quadrato di area doppia ha per lato la diagonale del primo), si volle duplicare il cubo (cubo di volume doppio); dopo aver bisecato un angolo, si cercò di trisecarlo; dopo aver trovato il quadrato equivalente a un poligono, si tentò di fare lo stesso per il cerchio (quadratura del circolo).

I tentativi di risolvere questi problemi con riga e compasso si rivelarono infruttuosi, e perciò i Greci, cui non mancava la fantasia e la genialità matematica, inventarono nuovi strumenti, cioè curve più complesse di quelle tracciabili con riga e compasso: rette e circonferenze.

### **La duplicazione del cubo.**

Il problema della duplicazione del cubo ha origini molto antiche.<sup>1</sup> Da una lettera di Eratostene di Cirene a Tolomeo III sappiamo che il problema viene collegato alla leggenda della duplicazione dell'ara cubica di Apollo a Delo, donde il nome di problema di Delo.

In essa leggiamo che dopo lunghe e infruttuose ricerche volte a risolvere il problema con riga e compasso, per primo Ippocrate di Chio (fiorito intorno al 430 a.C.) ridusse il problema a quello di inserire tra due segmenti, uno doppio dell'altro, due segmenti medi proporzionali, riducendo così il problema a una costruzione di geometria piana, ma di difficoltà non minore.

La questione fu investigata anche dai geometri che operavano nell'ambito dell'accademia di Platone, in particolare da Archita di Taranto ed Eudosso di Cnido. Eratostene nella sua lettera continua dicendo che tutti questi tentativi erano artificiosi e poco pratici, eccettuato forse quello di Menecmo (IV secolo a.C.), che risolse il problema di Delo mediante intersezione di due parabole. Alla fine

---

<sup>1</sup> Enriques e collaboratori: "Questioni riguardanti le matematiche elementari", Zanichelli 1926, Articolo XIX°.

della lettera invia a Tolomeo la descrizione di un suo strumento meccanico per l'inserzione di due medi proporzionali.

**Vediamo per prima l'idea di Ippocrate.** Dati due segmenti  $a, b$ , inserire tra di essi altri due, diciamo  $x$  e  $y$ , tali da avere la seguente doppia proporzione  $a/x = x/y = y/b$ . Eliminando  $y$ , abbiamo  $x^3 = a^2b$  e se  $b=2a$ , otteniamo  $x^3 = 2a^3$ , perciò  $x$  risolve la duplicazione del cubo di spigolo  $a$ . Il problema di geometria solida era perciò ridotto a un problema di geometria piana, ma i tentativi volti a eseguire la doppia inserzione con riga e compasso fallirono, perciò i Greci finirono per sospettare che la soluzione della duplicazione fosse impossibile (con quegli strumenti) e si decisero a seguire altre vie.

**Il metodo di Menecmo.**

Menecmo era uno dei matematici che frequentavano l'accademia di Platone. Secondo il commentatore neoplatonico Proco (410 – 485 d. C.) a lui si deve l'invenzione di quelle curve che poi da Apollonio furono dette coniche: ellisse, iperbole, parabola.

Menecmo considera due parabole che, con formalismo moderno, rappresentiamo con le equazioni  $x^2 = y$  e  $y^2 = 2x$ . L'ascissa della loro intersezione che cade nel primo quadrante è lo spigolo del cubo di volume 2 (avendo assunto uguale a 1 lo spigolo del cubo iniziale).

**Il metodo della cissoide di Diocle.**

Diocle (II – I secolo a. C.) costruì una curva interessante per duplicare il cubo: la cissoide (dal greco  $\kappa\iota\varsigma\sigma\omicron'\zeta$  che significa edera).

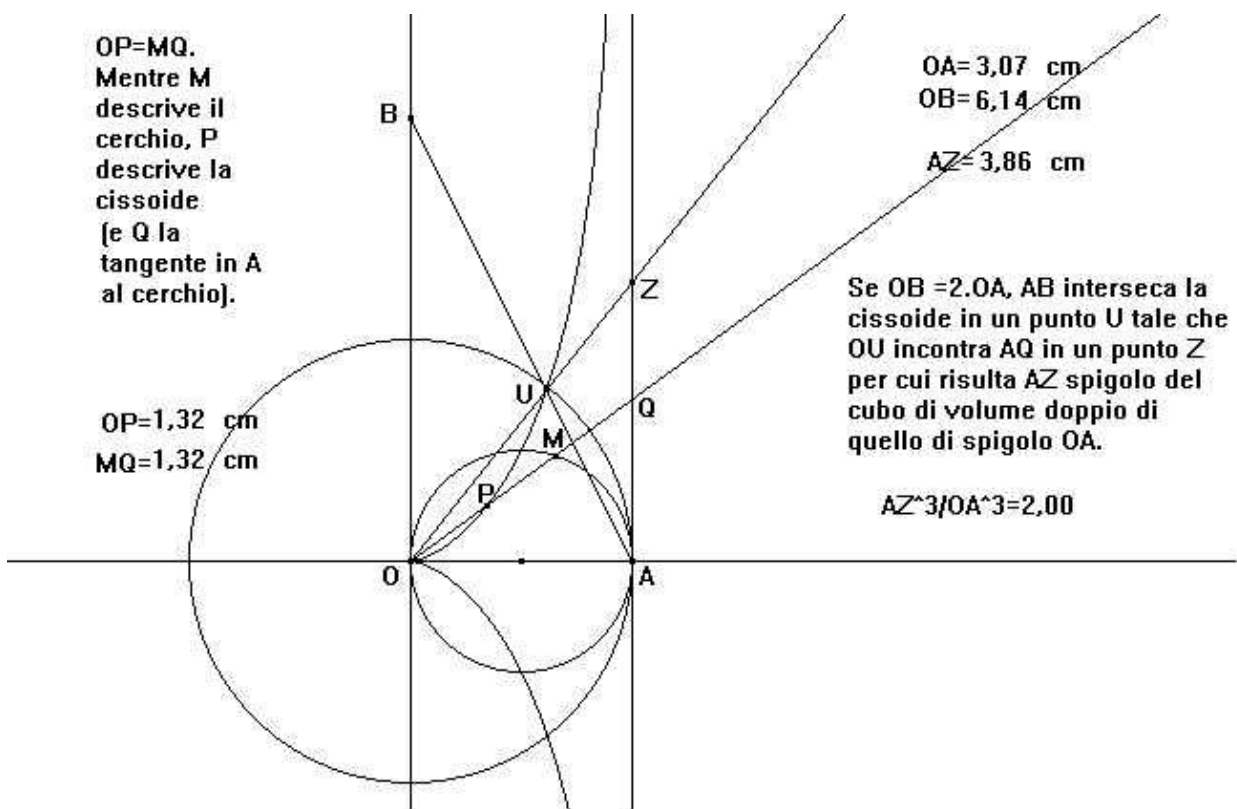


Fig. 1

La cissoide è una cubica avente una cuspidi in O, per asintoto la tangente in A al cerchio di diametro  $OA = a$ , equazione  $x^3 = (a-x)y^2$ . Essa è tracciata per punti: su ogni semiretta di origine O, che incontra in Q la tangente in A al cerchio base e in M detto cerchio, si prende  $OP = MQ$ . La cissoide è il luogo dei punti P. (Il disegno precedente è stato ottenuto con Cabri).

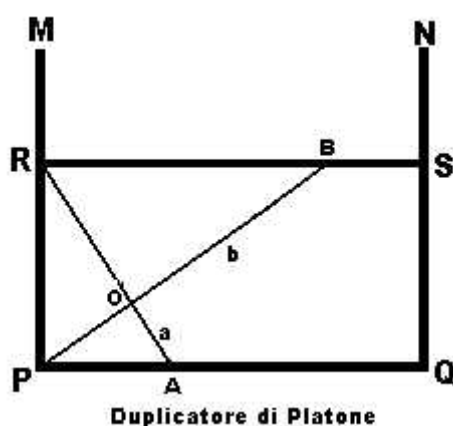
Una costruzione meccanica continua della cissoide dovette aspettare Newton, il quale usò una semplice squadra retta in Q col cateto corto QR uguale ad OA e l'altro sufficientemente lungo (Vedi Enriques, nota 1). Si prenda il punto H sulla retta AO, alla sinistra di O tale che OH sia la metà del

diametro OA, si faccia passare per H il cateto lungo della squadra, mentre l'estremità R del cateto QR scorra sulla retta perpendicolare ad OA nel centro; allora il punto medio X di QR descrive la cissoide.

**Uno strumento meccanico** per inserire due medie proporzionali tra due segmenti dati a e b è attribuito da Eutocio (commentatore del VI secolo d. C.) a Platone (vedi disegno sottostante).

Il duplicatore di Platone è costituito da due aste verticali PM e QN saldate a un'asta orizzontale PQ. PM e QN sono munite di scanalature in cui può scorrere un'asta RS, in modo che si mantenga parallela a PQ. I segmenti a e b si dispongono ad angolo retto in modo che costituiscano una squadra AOB. Si muove la squadra in modo che A stia su PQ, il prolungamento di OB passi per P e il prolungamento di OA intersechi PM alla stessa quota di B, fatto che si accerta muovendo il cursore RS. Osservando i triangoli APR e PRB, si trova che OP e OR sono i due medi proporzionali tra a e b. Se  $b = 2a$ , OP duplica il cubo di spigolo a.

Fig. 2



Può sembrare strano che Platone sia ricorso a un metodo meccanico per risolvere un problema geometrico, tenuto conto del biasimo che il filosofo riversava sui matematici che svilivano la loro disciplina per il solo fatto di adoperare un linguaggio da artigiani.

Secondo il Loria<sup>2</sup> si potrebbe conciliare l'idiosincrasia di Platone per le operazioni manuali e la sua realizzazione del duplicatore col desiderio di dimostrare quanto fosse facile immaginare e realizzare strumenti meccanici, mentre ben altro ingegno si richiede per afferrare speculativamente il mondo delle pure idee. In verità Platone ha ragione: il suo duplicatore è molto più semplice di quello (posteriore) di Eratostene; sembra voler dire: quando una mente come la mia si vuol cimentare con volgari metodi meccanici, non teme confronti!

Ci sarebbe ben altro da dire sulle costruzioni, anche approssimate, della duplicazione del cubo, ma dovendo dare spazio agli altri problemi, rimando alle opere citate nelle note 1 e 2.

### La trisezione dell'angolo.

Dividere un segmento in due, tre o più parti uguali richiede il teorema di Talete e il problema si risolve con gli strumenti canonici. Anche la bisezione di un angolo si esegue con riga e compasso (bisettrice dell'angolo). Trisecare un angolo è un'ovvia generalizzazione di un problema elementare, ma gli sforzi dei Greci rimasero infruttuosi, fino a quando non si rivolsero a curve più elevate della retta e della circonferenza.

Presenterò per primo il metodo basato sulla concoide di Nicomede (II secolo a. C.).

In generale, la concoide di una curva di equazione polare  $r = f(t)$  è la curva di equazione  $r = f(t) + a$  (oppure  $r = f(t) - a$ ), essendo a un segmento costante.

<sup>2</sup> Gino Loria, "Le scienze esatte nell'antica Grecia", Hoepli 1914.

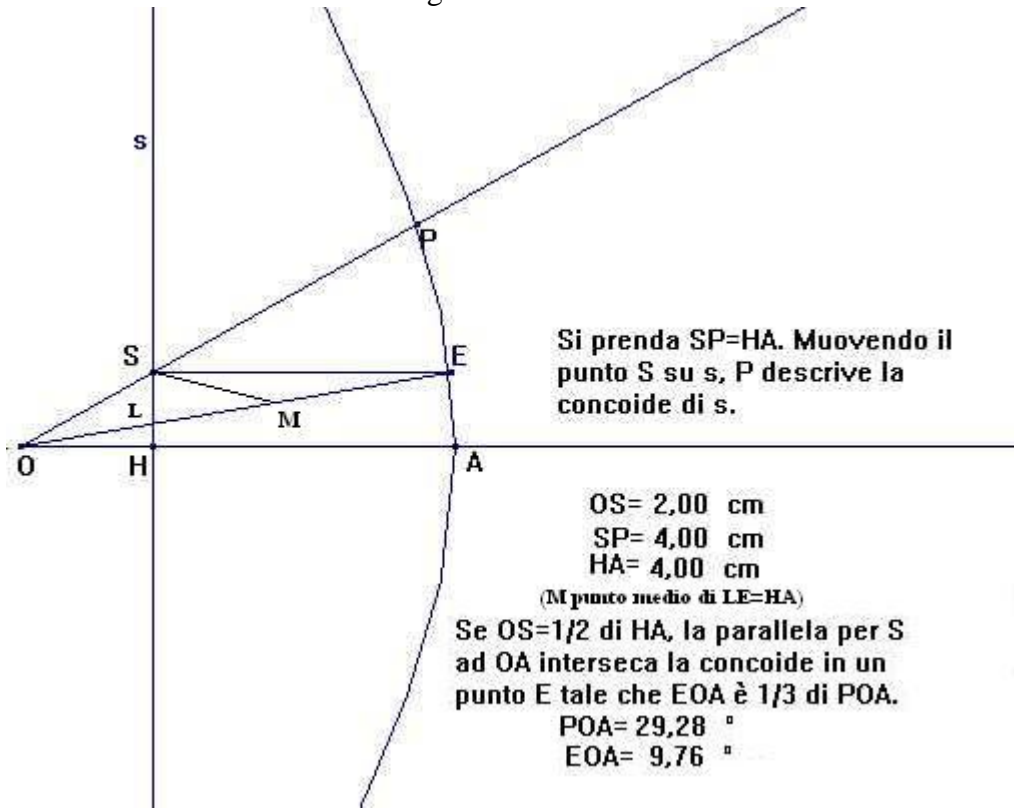
La concoide di Nicomede è la concoide della retta  $x=OH=p$ . Si veda il disegno nella pagina seguente, eseguito con Cabri.

Assunto OA come asse x, O come origine, la perpendicolare in O ad OA come asse y, la concoide della retta s di base HA = a è

$$(x-p)^2 (x^2 + y^2) = a^2 x^2.$$

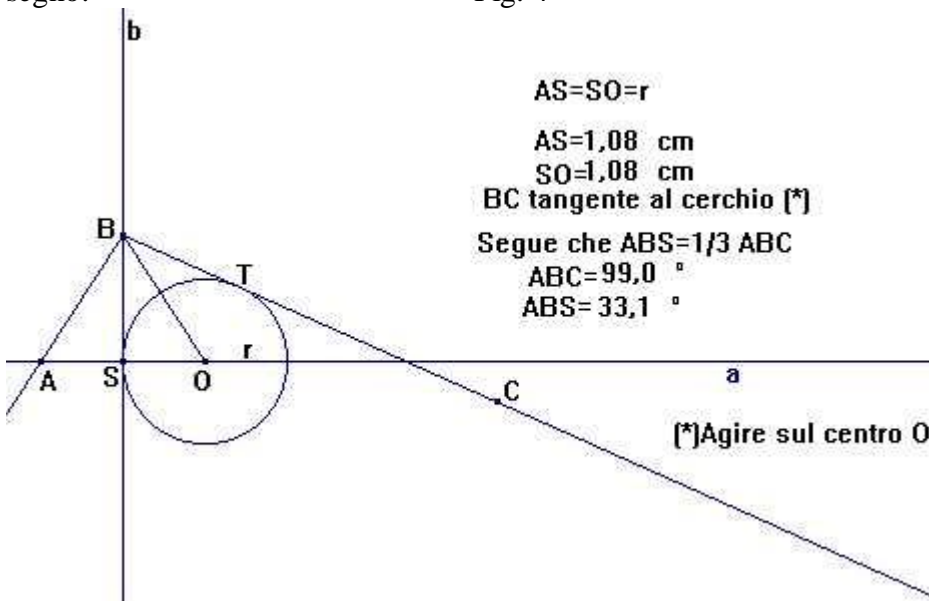
La concoide di Nicomede è pertanto una curva di 4° grado simmetrica rispetto all'asse OA con s come asintoto.

Fig. 3



Unno strumento meccanico per la trisezione dell'angolo è quello costruibile in base al seguente disegno:

Fig. 4

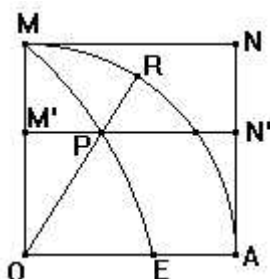


Lo strumento è costituito dal disco di centro O e raggio r, dall'asta b tangente in S al disco e dall'asta SA allineata al raggio SO e ad esso uguale. Se l'angolo da trisecare è ABC, si dispone lo

strumento in modo che l'asta  $b$  passi per il vertice  $B$  dell'angolo, l'estremità  $A$  di  $SA$  stia sul lato  $BA$  e il disco sia tangente al secondo lato  $BC$  dell'angolo.

### La trattrice di Ippia e la divisione di un angolo in $n$ parti uguali.

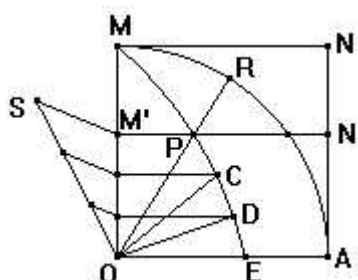
Ippia, di Elea in Magna Grecia secondo Loria (vedi nota 2), di Elide secondo altri<sup>3</sup>, ideò una curva che si costruisce per punti come intersezione di due segmenti in moto uniforme e che ha delle straordinarie proprietà. Si veda la figura seguente. Fig. 5



Dato il quadrato  $OANM$ , si immagini che il lato  $MN$  si muova di moto traslatorio uniforme fino a sovrapporsi al lato  $OA$  e che contemporaneamente  $OM$  ruoti uniformemente intorno ad  $O$  fino a sovrapporsi ad  $OA$ . I due moti comincino e finiscano insieme. Se  $OM$  si trova in  $OR$  quando  $MN$  è arrivato in  $M'N'$ , la loro intersezione  $P$  descrive la curva  $MPE$ , da Ippia detta *trattrice*.

Dalla sua generazione segue che il segmento  $OM'$  (ordinata di  $P$ ) e l'angolo  $POE$  sono proporzionali, perciò, diviso con riga e compasso (teorema di Talete) il segmento  $OM'$  in tre parti uguali, basta mandare da questi punti le parallele ad  $OA$  fino a incontrare la trattrice in  $C$  e  $D$  perché i segmenti  $OC$  e  $OD$  dividano l'angolo  $POE$  in tre parti uguali.

Fig. 6



In effetti, la trattrice permette di dividere l'angolo in  $n$  parti uguali.

Ma la trattrice ha delle proprietà ancora più meravigliose. Usando la notazione cartesiana, posto il lato del quadrato uguale ad  $a$ ,  $OA$  e  $OM$  come assi  $x$  e  $y$ ,  $OM' =$  ordinata di  $P = y$ ,  $AOR = \theta$ , risulta:  $y/a = \theta/(\pi/2)$ , cioè l'ordinata di  $P$  è proporzionale all'argomento, cosa già nota e sfruttata da Ippia per la trisezione dell'angolo. Abbiamo indicato con  $\pi/2$  l'angolo retto  $AOM$ . Dinostrato, fratello dell'accademico Menecmo inventore delle coniche, trova però una proprietà ulteriore, che noi ricaveremo per via analitica. Dette  $x$  e  $y$  le coordinate di  $P$ , risulta  $y = x \cdot \text{tang}(\theta) = x \cdot \text{tang}(\pi y/2a)$  e, per  $y \rightarrow 0$ ,  $x$  tende ad  $OE = 2a/\pi$ . Pertanto,  $\pi$  è quarto proporzionale dopo  $OE$ ,  $2a$  e il segmento unitario. Segue che, una volta disegnata la trattrice, un segmento lungo  $\pi$  si può determinare con riga e compasso, utilizzando il teorema di Talete.

Ricordo che la trattrice è detta anche quadratrice, perché consente di *quadrare* il cerchio; come tale la ricorda il commentatore Pappo (III° secolo d. C.), attribuendola a Dinostrato, forse perché non ritiene di dover citare chi, come Ippia, l'ha inventata per altri scopi. Tuttavia Proco (412 – 485 d. C.), che pure è un acceso ammiratore di Platone e spesso ignora gli studiosi che, come il sofista Ippia, sono filosoficamente lontani dal suo maestro, attribuisce la paternità della quadratrice a Ippia, per quanto riguarda la trisezione dell'angolo.

<sup>3</sup> Carl Boyer, "Storia della matematica", 1968, Oscar Mondadori 1990.

Si ricordi però che, in fatto di date e di attribuzioni, i Greci sono poco attendibili e spesso non si fanno scrupolo di attribuire a se stessi o a loro simpatizzanti le scoperte altrui, specialmente se di diversa scuola filosofica.

### **A proposito di problemi algebrici e problemi trascendenti.**

La duplicazione del cubo si traduce in un'equazione algebrica di 3° grado:  $x^3 = 2$ , irriducibile nel campo euclideo dei dati, perciò non risolubile con riga e compasso. Siccome il problema è rappresentato da un'equazione algebrica, il problema è algebrico,  $\sqrt[3]{2}$  è un numero algebrico.

Anche la trisezione dell'angolo è un problema algebrico, infatti il problema si traduce in un'equazione algebrica di 3° grado:  $x^3 - 3ax^2 - 3x + a = 0$ , essendo  $a$  la tangente dell'angolo da trisecare e  $x$  la tangente dell'angolo terza parte. La concoide con la quale Nicomede triseccò l'angolo è una curva algebrica (di 4° grado). Tuttavia, Ippia triseccò l'angolo con una curva che, con la nomenclatura moderna, diciamo trascendente. Ciò però non significa che la trisezione dell'angolo sia un problema trascendente. Perciò il fatto che la quadratura del cerchio sia stata ottenuta con la quadratrice, curva trascendente, non implica necessariamente che  $\pi$  sia un numero trascendente; per affermare questo, bisognerebbe dimostrare che non è possibile quadrare il cerchio con curve algebriche, oppure, equivalentemente, che  $\pi$  è un numero trascendente, cioè non algebrico, non radice di alcuna equazione algebrica a coefficienti interi.

I greci non avevano gli strumenti per affrontare tali questioni. E' però loro grandissimo merito avere tracciato nuove fruttuose vie di indagine geometrica e immaginato nuovi strumenti concettuali per risolvere problemi che, con gli strumenti canonici, riga e compasso, risultavano loro impossibili.

E' degno di ammirazione, in particolare, il lavoro di Ippocrate di Chio, che riuscì a quadrare con riga e compasso le cosiddette lunule, particolari porzioni di piano comprese tra archi di circonferenze. A tale proposito, si vedano le opere citate nelle note precedenti.

Occorrerà aspettare il XIX° secolo perché *i problemi impossibili* dei Greci fossero definitivamente risolti con nuovi strumenti, di tipo algebrico. Dopo che il francese Hermite (1822 – 1901) nel 1873 dimostrò la trascendenza del numero  $e$ , finalmente nel 1882 il tedesco Lindemann (1852 – 1939) dimostrò la trascendenza di  $\pi$ . Il grosso del suo lavoro consistette nel dimostrare che l'equazione esponenziale  $e^{ix} + 1 = 0$  ( $i$  è l'unità immaginaria) non ha soluzioni per  $x$  algebrico. Siccome nel '700 lo svizzero Eulero (1707 – 1783) aveva dimostrato l'identità  $e^{i\pi} + 1 = 0$ , combinando i due risultati segue immediatamente la trascendenza di  $\pi$ . A questo punto il problema era definitivamente chiuso: non era possibile quadrare il cerchio con curve algebriche, tanto meno con rette e circonferenze.

Era così definitivamente chiusa una questione che per due mila anni aveva assillato i matematici, tanto che l'espressione *quadratura del circolo* era entrata, ed è rimasta, nel linguaggio comune a significare un problema impossibile, come mirabilmente ci ricordano i versi danteschi:

“ Qual è 'l geométra che tutto s'affigge  
Per misurar lo cerchio e non ritrova,  
pensando, quel principio ond'elli indige, .....”<sup>4</sup>

\* Già docente nel Liceo Scientifico “Scorza” di Cosenza

---

<sup>4</sup> Dante, “Paradiso” XXXIII 133.