OTTAVIO SERRA
Astrazione matematica e calcolatore

Premessa.

Perché introdurre il computer nell'insegnamento di base e in particolare nell'insegnamento della matematica? Il computer come strumento multimediale interessa tutte le discipline, sia come strumento di lavoro (editor di testi, foglio elettronico per tabelle e grafici, base di dati: *Dbase* o *Access* per fare due esempi, presentazione di lavori: *power point* per esempio), sia come strumento di comunicazione e di accesso all'informazione (posta elettronica, internet).
C'è ancora un altro modo di utilizzo del computer che è comune a tutte le discipline, ognuna nell'ambito della propria specificità; mi riferisco alla fruizione di software didattico, di solito su cd-rom, come programmi (più o meno) interattivi su argomenti di matematica, di scienze, di materie umanistiche, di arte, di musica.
C'è però un modo peculiare di utilizzo del computer nell'ambito dell'insegnamento matematico ed è di questo aspetto che intendo occuparmi. E' ciò che di solito si intende parlando di informatica nel curriculum di matematica.
Ci si potrebbe chiedere: perché introdurre l'informatica nell'insegnamento della matematica? La matematica è una scienza astratta nella quale domina il concetto di infinito, da Zenone di Elea e da Eudosso di Cnido, ma nessun computer è in grado di padroneggiare questo concetto. La matematica procede per intuizioni e congetture, per creazione di modelli e per generalizzazione, per dimostrazione e per formalizzazione.. Non c'è il pericolo che l'uso del computer mortifichi e inaridisca nei giovani le capacità di intuizione e di astrazione che sono essenziali allo sviluppo della matematica? (della mentalità matematica?).
Il pericolo non è trascurabile e le obiezioni prospettate hanno un loro fondamento.
Tuttavia la riflessione sugli errori commessi nei vari momenti dell'innovazione dell'insegnamento matematico negli ultimi cinquant'anni, in particolare con l'introduzione della teoria degli insiemi negli anni '60 (la cosiddetta *insiemistica*) ci indica il modo di evitare i più grossolani errori didattici allora commessi: affrontare prematuramente questioni astratte e generali che risultano vuote esercitazioni verbali, presto rigettate dal cervello dei giovani per autodifesa, se alle spalle non c'è un consistente supporto di modelli intuitivi e "concreti".
L'astrazione ha bisogno della concretezza; astratte sono, per esempio, le proprietà formali delle operazioni sugli interi, ma diventano concrete se ce ne serviamo per semplificare un calcolo o per ottimizzare una formula.
Per non restare nel vago, faccio due esempi.
1° Il quadrato di un numero di due cifre che termina per 5 si ottiene moltiplicando la cifra delle decine per la successiva e scrivendo di seguito al prodotto 25. Per esempio, il quadrato di 75 è (essendo 7 per 8 = 56) 5625. Come mai? Viene il desiderio di giustificare, ma allora devo usare la regola del quadrato del binomio, che richiede la proprietà distributiva e quella commutativa e queste acquistano concretezza, perché finalizzate a un obiettivo. Sorge anche la curiosità di generalizzare: che succede se ho un numero di tre cifre, sempre terminante per 5? Si ottiene una *ricetta* così semplice o le cose si complicano? La cosa più importante non è arrivare in ogni caso a un risultato positivo, ma esplorare le possibilità, pronti a tornare indietro e cercare nuove vie. (*Trackbak* in informatica).
2° Lavorando con una calcolatrice a 8 cifre di mantissa (8 cifre significative) si voglia verificare che 1-cos(x) diviso il quadrato di x tende a 1/2 man mano che x tende a zero (x in radianti, naturalmente). Si trova dapprima 0,499, ma spingendo x verso zero, per migliorare la convergenza a 1/2, si ha invece il collasso a zero. Come mai?
In linea di principio la matematica può fare a meno del computer; ne ha fatto a meno per migliaia d'anni, come del resto della stampa e in genere di ogni altro strumento tecnologico. In realtà ciò non

è del tutto vero: le tacche su un bastone, le cordicelle annodate o le fettucce colorate degli Aztechi, le pietruzze (da cui *calculus*) , l'abbaco erano degli strumenti più o meno ingenui di calcolatori. Non dimentichiamo poi che il problema del calcolo automatico attirò l'attenzione di insigni studiosi, come Leibniz e Pascal, più noti al grande pubblico come filosofi e letterati che come matematici.
Del resto, lo sviluppo della matematica ha sempre sentito l'influsso di innovazioni tecnologiche e di rivoluzioni economiche: non è un caso che il rifiorire della matematica in Europa alla fine del Medio Evo coincida con l'espansione del commercio delle repubbliche marinare italiane nel Mediterraneo; non è un caso che l'analisi matematica si sviluppi, superando i confini della matematica greca, con l'avvento della stampa che consente a una moltitudine di studiosi di avvicinarsi a Euclide, Apollonio, Archimede, superando la barriera dei pochi manoscritti gelosamente custoditi in monasteri e in poche biblioteche private. A ciò si aggiunga lo stimolo rappresentato dal problema delle longitudini in mare, dopo la scoperta dell'America e dei paesi del Pacifico.
Più recentemente, la teoria dei giochi, la programmazione lineare che è l'aspetto duale della prima, la teoria dell'informazione nascono e si sviluppano in America negli anni '40 sulla base degli studi di ricerca operativa compiuti in quegli anni a fini bellici.
La rivoluzione tecnologica rappresentata dall'avvento del computer tocca ancor più da vicino la matematica perché non solo la progettazione dell'hardware e del software richiedono metodi e tecniche matematiche, ma perché col computer si può fare matematica.
Il fatto che si possa fare matematica col computer non ci deve spingere all'errore di adattare la matematica al computer, come è successo con la teoria degli insiemi (tutta la matematica nella cornice insiemistica); pertanto, non la matematica del computer, ma la matematica col computer, il computer al servizio della matematica.
La matematica ha tanti aspetti, tutti ugualmente importanti: quello dell'intuizione e quello della dimostrazione, quello dell'analisi e quello della sintesi, quello della ricerca euristica e quello della sistemazione formale.
In nessuno di questi aspetti il computer si può sostituire al cervello dell'uomo, tuttavia può essere vantaggiosamente utilizzato per favorire e sviluppare la fantasia matematica, l'intuizione e il ragionamento, per abituare a proporre congetture e motivare l'esigenza di dimostrare.

La matematica col computer.
Vorrei ora soffermarmi su alcuni argomenti riguardanti il programma di matematica e per in quali l'ausilio del computer si può rivelare molto efficace.

a) L'approssimazione numerica.

Una volta questo argomento era trattato con una certa serietà solo negli istituti tecnici. Nei Licei imperavano i numeri reali e le classi contigue, solo che nelle rare occasioni di calcolo numerico pi greco era 3,14 e la radice quadrata di 2 era 1,41. Per dire la verità, la situazione cominciò a migliorare quando gli studenti, abusivamente ma con piena ragione, cominciarono a usare le calcolatrici tascabili. Il pericolo è però che passino per buoni risultati a 8 cifre, solo perché lo dice la calcolatrice. E' questo il momento di intervenire per trattare in modo breve ma convincente il problema degli errori di arrotondamento e di propagazione, accompagnando essenziali cenni teorici con esercizi di confronto tra i risultati ottenuti con una calcolatrice a 8 cifre e quelli ricavabili da un algoritmo più potente, come la calcolatrice virtuale di Windows o un programma in Basic o meglio ancora in Pascal con l'uso del tipo reale esteso.
Strettamente connesso è il problema della

b) Stabilità delle formule

Il calcolo letterale è un argomento centrale del programma di matematica dei bienni; esso permette tra l'altro di trasformare un'espressione complessa in una equivalente più semplice (non sempre, d'accordo) e in ciò consiste una delle sue motivazioni.
Si potrebbe pensare che l'uso del computer faccia venir meno tale motivazione, data la velocità di calcolo della macchina. E invece proprio dall'uso del computer viene una maggiore motivazione

alla padronanza del calcolo letterale per una ragione che nella pratica del calcolo manuale scolastico non si manifesta perché né professori né tanto meno alunni hanno tempo o voglia di eseguire manualmente lunghe sequenze di calcoli approssimati: **la stabilità delle formule**.
Si voglia per esempio calcolare il rapporto tra la differenza dei quadrati di due numeri a e b e la loro differenza a-b. Chiunque conosca le quattro operazioni può trovare il risultato, ma chi ha pratica di calcolo letterale arriva prima: basta sommare a e b. Ma c'è di più. Se a e b sono numeri a 8 cifre e differiscono di poco, poniamo di qualche unità, il calcolo bruto induce un errore dell'ordine di 10 mila unità, presumendo di adoperare una calcolatrice ad 8 cifre. Questo errore, di perdita di cifre significative nella sottrazione di numeri *grandi* e quasi uguali, noto come errore di cancellazione, si presenta in modo spettacolare se si programma l'algoritmo di Archimede per il calcolo di pi greco e si vogliono ottenere 9 o 10 cifre decimali anzichè le 3 o 4 del Siracusano : tanto ci pensa il computer! Dopo un miglioramento iniziale del risultato, si assiste a un peggioramento fino al collasso finale: pi greco = 0. Il fatto è che la formula iterativa per il lato dei poligoni inscritti nel cerchio contiene una differenza di termini che tendono a diventare uguali man mano che aumenta il numero dei lati; occorre perciò una manipolazione algebrica che elimini l'operazione di sottrazione trasformando la differenza in un quoziente.
Questa è una buona occasione per armonizzare un argomento di geometria: formula iterativa per il calcolo dei lati dei poligoni inscritti e circoscritti a un cerchio, con uno di calcolo numerico: perché la formula semplice non è stabile; eseguire infine la verifica al calcolatore del comportamento di entrambe.
Questa potrebbe essere anche l'occasione per avviare il discorso sugli algoritmi e sulle iterazioni.
Ma si presta ancora ad un'osservazione importante. Nella pratica matematica usuale occorrono nomi diversi per denotare variabili diverse. Così, se denotiamo con L1 il lato dell'esagono, dovremo usare L2 per quello del dodecagono, poi L3, L4, eccetera. Quante variabili (nomi di variabili) occorrono se vogliamo pi greco a meno di 1 miliardesimo? A parte il problema di gestirle, e il rischio di saturazione della memoria disponibile, è difficile prevederne il numero, è di conseguenza complessa la realizzazione dell'algoritmo. Il concetto di assegnamento mostra invece che basta una sola variabile per risolvere il problema. L'algoritmo può essere proposto anche in una seconda classe superiore.

c) Variazione dei parametri.

Spesso la possibilità di eseguire velocemente dei calcoli variando i parametri del problema fa notare delle regolarità insospettate, suggerisce delle congetture.
Si può pensare, in quest'ottica, di presentare in modo nuovo molti esercizi, anche di geometria, in forma problematica: indagare se è vera questa o quest'altra proprietà, anziché dimostrare una proposizione, che a questo punto lo studente sente come vera per imposizione prima di averla dimostrata. (Non è mai successo in classe che il professore enunci una proposizione che poi alla resa dei conti si dimostri falsa. Magari sarebbe il caso che ogni tanto lo facesse). Non è necessario poi che in ogni caso si debba raggiungere la pace di una dimostrazione rigorosa; ci sono tante questioni aperte in matematica, forse alcune per sempre indecidibili, mentre a scuola si ha l'impressione che tutto sia stato detto e dimostrato. Vorrei raccontare un episodio realmente accaduto.
Tempo fa un mio amico, amante della matematica ma digiuno di tecniche, mi sottopose la seguente "verità" : *in un triangolo rettangolo l'area è uguale al prodotto dei cateti diminuiti del raggio del cerchio inscritto*. Egli ne era fermamente convinto, perché aveva eseguito innumerevoli verifiche, presumibilmente su triangoli pitagorici per avere lati misurati da numeri interi, ma mi chiedeva la certezza della dimostrazione. Questa è abbastanza facile da ottenere, ma è interessante l'idea di rafforzare la congettura con verifiche numeriche, magari estese a numeri decimali, se si sa scrivere il semplice algoritmo necessario. Naturalmente una sequenza di verifiche, per quanto lunga, non è una dimostrazione, ma la conferma della congettura motiva fortemente l'esigenza di dimostrare. Non è detto però che tale dimostrazione si ottenga(perché non siamo bravi a trovarla o perché la congettura, pur essendo vera, è indimostrabile o perché è indecidibile in linea di principio). Viceversa, basta una smentita per capire che la congettura è falsa.

d) Numeri reali e calcolatore.

Il calcolatore tratta sol o numeri (decimali) finiti; il tipo *reale* è una finzione. Del resto, nella pratica del calcolo manuale, la radica quadrata di 2 è 1,41 o, nelle grandi occasioni, 1,4142. Questo va detto esplicitamente a scanso di equivoci. Quale aiuto può dare allora il computer quando si introduce il concetto niente affatto semplice di numero reale? L'aiuto lo può dare costruendo per il suo tramite più di una coppia di classi contigue di numeri razionali (effettivamente di numeri decimali finiti) che definiscono lo stesso numero reale. Ciò può essere fatto, nell'ipotesi che si voglia definire la radice n-ma di un numero positivo, costruendo, per esempio, prima due successioni, una minorante e una maggiorante, che differiscono di una unità sull'ultima cifra decimale, poi due successioni con il metodo di bisezione.

In tal modo si evidenzia che un numero reale non è una coppia di classi contigue di numeri razionali, ma un'infinità di coppie equivalenti, equivalenti nel senso che la differenza tra elementi corrispondenti delle successioni minoranti è una successione infinitesima, come la differenza delle successioni maggioranti. Si può poi, se la maturità e l'interesse degli alunni lo consentono, magari ritornando sull'argomento in un anno successivo, svincolarci dal problema dell'approssimazione per difetto e per eccesso e definire, seguendo Cantor, un numero reale come una classe di successioni di Cauchy equivalenti di numeri razionali. (Ricordo che una successione di Cauchy è una successione tale che la differenza tra due suoi termini è in modulo definitivamente minore di ogni numero (razionale) positivo e che due successioni di Cauchy si dicono equivalenti se la successione delle differenze dei termini di uguale indice è equivalente alla successione nulla).

e) La rappresentazione grafica.

La rappresentazione grafica è uno strumento prezioso per rendere intuitivi i concetti e in questo campo l'utilizzo del calcolatore è di grande aiuto.

Nello studio della geometria analitica si presenta specialmente all'inizio il problema di approssimare il grafico di una funzione con un numero sufficientemente grande di punti. Tranne che in casi eccezionali, è molto penoso calcolare manualmente un numero adeguato di punti, ma si possono usare le calcolatrici e tracciare con la penna o il gesso il grafico; sorgono problemi di scala. Poi confrontare col grafico disegnato sullo schermo di un computer da un programma grafico: anche il computer ha problemi di scala? (Certamente, se il programma non è all'altezza o se la funzione è particolarmente *maligna*).

E' possibile anche affrontare empiricamente (almeno all'inizio) per via grafica problemi sulle funzioni. Per esempio, determinare il valore del parametro k per cui il grafico della funzione

$$y = x^3 + kx$$

subisce una transizione qualitativa e discutere la questione se sia possibile risolvere il problema per via algebrica. (Basta la regola di Ruffini).

La rappresentazione grafica dà un aiuto essenziale per risolvere tanti problemi di algebra e di analisi mediante approssimazione numerica. Accennerò ad alcuni.

Zeri di una funzione

Volendo trovare le soluzioni di un'equazione f(x)=0, con f(x) funzione continua in un intervallo, il grafico della funzione individua in prima approssimazione gli zeri di f(x) (le soluzioni dell'equazione), che si possono poi approssimare con vari metodi; si può cominciare dal più semplice concettualmente, quello di bisezione, in seguito si può introdurre quello delle tangenti. Spesso mi sento fare la seguente domanda: ma non c'è anche il metodo delle secanti? E' vero, ma il suo algoritmo è più complicato di quello delle tangenti che ha convergenza quadratica, mentre quello delle secanti ha convergenza quasi lineare; tanto vale quello di bisezione che è più semplice e dà valori per difet-

to e per eccesso. Quello delle tangenti (di Newton) è più veloce (ha infatti convergenza quadratica), ma richiede il concetto e l'uso delle derivate.
Un risvolto non secondario di approcci iterativi è di far cogliere con mano agli studenti che la determinazione di una soluzione di un'equazione non è legata all'esistenza di formule di risoluzione *chiuse*, come per le equazioni algebriche fino al 4° grado e per i pochi tipi di equazioni non algebriche che circolano nella scuola.

Calcolo di integrali (*aree*).

Il concetto di integrale, interpretato dapprima come area per visualizzarlo intuitivamente, ha un'enorme portata perché trova innumerevoli applicazioni in matematica e nelle scienze.
Il fatto di poter fruire di uno strumento flessibile e veloce come il computer permette di concentrare l'attenzione sull'aspetto concettuale che non resta sul piano della pura esposizione verbale, ma può essere utilizzato su semplici esempi numerici. L'algoritmo dei rettangoli e subito dopo quello dei trapezi sono estremamente semplici e danno esempi di algoritmi che calcolano la stessa cosa, ma con velocità di convergenza diversa. Se sul computer è installato, oltre che un linguaggio di programmazione, che per me resta lo strumento informatico principe per far capire la matematica (quella computazionale intendo), anche un programma di calcolo simbolico, come *Derive, Maple, Mathematica,* si possono fare confronti su quello che fa un programma specializzato ed evoluto e quello che fa il nostro programmino di approssimazione numerica.
Ritornando al concetto di integrale, quanto prima lo si incontra tanto meglio è. Si può partire da un problema di fisica elementare o altro. Per esempio, come trovare lo spazio percorso da una particella in un tempo assegnato, data la velocità in funzione del tempo. Sorgono interessanti problemi che conducono all'assimilazione di concetti astratti: una porzione di piano cartesiano si misura in metri quadrati, in metri, in Joule, a seconda dell'interpretazione che diamo agli assi.
Nelle classi terminali si possono prospettare problemi di efficienza, valutando per via grafica l'errore commesso dalle formule dei trapezi, quella cosiddetta chiusa che utilizza i punti estremi dell'intervallo di integrazione e quella aperta. Dal confronto tra i due errori si può ricavare un algoritmo di interpolazione che conduce alla formula di Simpson. Si noti che gli strumenti concettuali necessari sono già tutti posseduti dagli studenti, di un triennio di Liceo scientifico come da quelli di un Liceo classico.
Vorrei citare ancora un esempio, che si può sviluppare anche in modo indipendente dal calcolo integrale e dall'uso del computer.
Se si sono studiate le trasformazioni (affini) del piano, si può giustificare, dall'invarianza del rapporto delle aree che l'area racchiusa dall'ellisse di semiassi a e b è πab, che generalizza quella del cerchio (di raggio a) $\pi a.a$. Sorge allora spontanea la domanda: siccome la lunghezza della circonferenza è $2\pi a$, che si può scrivere $\pi(a+a)$, forse la lunghezza dell'ellisse è $\pi(a+b)$.
E' possibile quasi senza matematica dimostrare che la congettura è falsa. Infatti, se la formula fosse vera, dovrebbe valere per ogni b, ma per b tendente a zero l'ellisse degenera in un segmento di lunghezza 2a, da contare due volte (andata e ritorno), perciò la lunghezza è 4a e non πa.
Dove sta l'errore logico?

Tangente al grafico di una funzione.

Il problema della tangente si presenta agli inizi della geometria analitica sia in problemi puramente geometrici sia in fisica (velocità istantanea eccetera).
Per le funzioni polinomiali è abbastanza agevole calcolare la tangente in un punto imponendo la coincidenza di (almeno) due intersezioni tra grafico e retta con l'algoritmo di Ruffini; più laborioso è tale approccio che non fa uso del concetto di limite per funzioni razionali e in generale algebriche.
Volendo invece usare un algoritmo di approssimazione numerica, la derivata va approssimata con un rapporto incrementale con incremento della variabile sufficientemente piccolo. Il *sufficientemente piccolo* dipende dall'aritmetica disponibile perché se lo si prende troppo piccolo si rischia di incorrere nell'errore di cancellazione. Si può testare su casi noti qual è il valore ottimale. Si può poi,

con considerazioni grafiche, introdurre l'approssimazione al coefficiente angolare della tangente col *doppio passo*, cioè approssimandolo con la media aritmetica tra i rapporti incrementali destro e sinistro.
La morale del discorso è che in tal modo si abituano gli studenti a lavorare in modo critico, a fare stime preliminari dei risultati attesi, a non aspettarsi miracoli da nessuno, neanche dal computer che fa velocemente le cose, è vero, ma solo le cose che gli è stato detto di fare. Se la funzione è molto irregolare o se il programma ha una pecca, si rischia di accettare per buoni risultati assurdi.

Studio delle trasformazioni geometriche.

Se si dispone di un buon programma grafico come *Cabri-geometrie* realizzato all'Università di Grenoble, si possono fare interessanti lavori di geometria piana e di trasformazioni delle figure, fino a uno studio avvincente dei luoghi geometrici e delle coniche. E' suggestivo vedere una iperbole che si trasforma gradualmente in un'ellisse, variando col mouse qualche parametro, per esempio l'asse trasverso, fermi restando i fuochi.

f) ***Algoritmi e programmi.***

Ritengo la stesura di un algoritmo sommamente istruttiva, sia perché in tal modo vengono al pettine eventuali dubbi o interpretazioni errate, sia perché l'algoritmo richiede un processo più o meno spinto di formalizzazione che favorisce l'acquisizione di strumenti concettuali astratti, che sono tanto più potenti quanto appunto sono astratti.
In verità la matematica da sempre ha esibito algoritmi, le regole delle quattro operazioni sono algoritmi, poi ci sono quelli classici: l'algoritmo euclideo per il massimo comune divisore, la scomposizione in fattori primi, la regola di Ruffini, per fare degli esempi. Tutti gli studenti sanno usare questi algoritmi, ma non so quanti sarebbero capaci di esporli, comunicarli ad altri in forma corretta e precisa nel linguaggio naturale. Del resto, essi li hanno appresi dai professori e dai libri sulla falsariga di esempi commentati da frasi che terminano con "*e così via*" o "*eccetera*". Tutto ciò non è affatto sbagliato sul piano psicologico e didattico, perché la mente umana ha la straordinaria facoltà di apprendere per associazione di idee e per analogia, facoltà preclusa ai calcolatori, almeno fino ad ora e per il futuro più o meno prossimo. Per il momento occorre scrivere l'algoritmo in forma generale e chiusa, cioè in una forma in cui compaiono nomi di variabili e non costanti ("professore, facciamo un esempio") e in cui sia esplicitata l'ultima istruzione (chiusura, appunto). E' questo lavoro estremamente stimolante (provare per credere) e formativo.
A proposito del massimo comune divisore, vorrei osservare che nella scuola prevale l'algoritmo (manuale) della fattorizzazione dei due numeri. Però esso va bene per numeri piccoli; infatti è un algoritmo di complessità esponenziale, oltre che parecchio più difficile da implementare. Quello di Euclide invece, non solo è facilissimo da implementare, ma è di complessità logaritmica (è velocissimo). Provare ad usare i due algoritmi, anche manualmente per due numeri dell'ordine delle migliaia e dei milioni.
La stesura dell'algoritmo rappresenta il momento creativo e a rigore non ci sarebbe bisogno di tradurlo in un programma da far girare su un computer. Ma ci sono tre ordini di motivi per farlo.
Il primo è di natura psicologica e riguarda la soddisfazione di vedere il computer che fa esattamente quello che volevamo. Questa soddisfazione è una potente spinta motivazionale. E' bene pertanto che i primi algoritmi siano molto semplici e brevi per evitare che una prematura complessità e la conseguente quasi inevitabile caduta in un mare di errori sintattici, logici, matematici distruggano quella spinta motivazionale che volevamo suscitare.
Il secondo è appunto il lavoro di messa a punto del programma; ci saranno sempre degli errori che nella stesura dell'algoritmo ci erano sfuggiti o perché inessenziali a livello concettuale o perché ci eravamo illusi di aver capito a fondo la logica del problema.
Il terzo riguarda l'acquisizione di un metodo di lavoro logico e ordinato, metodo che si può esportare in ogni campo dell'attività umana concettuale o pratica.
Imparare l'arte di testare un programma per scoprire gli errori è un'attività altamente formativa e stimolante, è un'eccitante avventura intellettuale.