Ottavio Serra
L'Infinito in matematica

L'infinito presso i Greci.

Il concetto di infinito, prescindendo dall'ovvia possibilità di conteggio indefinito presente nell'aritmetica pitagorica, nasce con la consapevolezza che, senza di esso, non è possibile fondare la teoria delle grandezze incommensurabili, ovvero dei numeri irrazionali.

In verità anche il problema del semplice conteggio presenta delle difficoltà che si chiariscono gradualmente e che si risolvono definitivamente solo con Archimede. Queste difficoltà sono connesse anche ai problemi del linguaggio verbale e scritto. Se non si hanno dei vocaboli e dei segni per denotare i concetti, questi restano oscuri. Il termine μυρια'σ (miriade) vuol dire sia diecimila, sia numero immensamente grande e in seguito significò anche *infinito*. E' solo con Archimede che si introducono nomi per numeri arbitrariamente grandi e tecniche per operare su di essi.

Già però in Anassimandro (VI sec a. C.) si trova il termine 'απειροσ che a rigore significa *senza confine,* illimitato o indefinito, ma non proprio infinito.

Zenone di Elea (495 – 435 a.C.) presenta col paradosso di *Achille* il concetto di infinito potenziale e quello duale di infinitesimo: una successione arbitrariamente grande di segmenti (si badi bene, non numeri) che finiscono col diventare arbitrariamente piccoli e la cui somma dovrebbe essere al contempo finita e infinita.

Infine Eudosso di Cnido (408 – 355 a. C.) *imbriglia*, per così dire, l'infinito, creando una teoria delle grandezze incommensurabili basata su uguaglianze e disuguaglianze di rapporti. La teoria di Eudosso è poi sviluppata da Euclide (Alessandria, intorno al 300 a.C.) nel quinto libro degli *Elementi.*

Per capire come il confronto di grandezze incommensurabili porta a procedimenti infiniti, considero il classico problema del lato e della diagonale del quadrato. Se essi fossero commensurabili, riportando il minore (il lato) sulla maggiore (la diagonale) e poi la differenza sulla minore, e così via, dopo un numero finito di passi non si avrebbe più una differenza finita. Avremmo perciò un segmento **u** sottomultiplo comune della diagonale e del lato, **d**=n**u**, **l**=m**u** e il rapporto **d/l** sarebbe uguale a un rapporto di interi, al numero razionale m/n. Nel caso considerato il procedimento non ha fine, si ha sempre un segmento residuo, indefinitamente più piccolo ma finito, e il rapporto **d/l** non è esprimibile come rapporto di interi, non è un numero (razionale), è 'αλογοσ (irragionevole, irrazionale), oppure è αρητο'σ (innominabile, da non dirsi in pubblico).

Anche per il problema della quadratura del cerchio e, in generale, delle figure piane a contorno curvilineo, tranne che in casi particolari, come le lunule di Ippocrate di Chio (attivo verso il 430 a.C.), l'equivalenza ad un quadrato non si riduce alla decomposizione in un numero finito di parti a due a due uguali, ma conduce a sequenze infinite. Nel caso delle figure solide questa difficoltà si incontra già per le piramidi. In questo campo rifulse il genio di Archimede (287 – 212 a.C.). Per il problema particolare della quadratura del cerchio crea un algoritmo potenzialmente infinito, per confrontare il cerchio con poligoni regolari inscritti e circoscritti che ne danno l'area per difetto e per eccesso. Trova così per il rapporto π tra l'area del cerchio e il quadrato del raggio la famosa disuguaglianza $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{10}{70}$, (arrestandosi ai poligoni con 96 lati). L'algoritmo archimedeo è estremamente semplice ed efficiente; oggi, implementato con un linguaggio di programmazione, consente di ottenere π con 15 cifre decimali in una frazione di secondo, arrivando a poligoni di oltre duecento milioni di lati.

E' bene ribadire che l'infinito dei Greci è l'infinito potenziale, nel senso che una grandezza si può accrescere quanto si vuole. Si pensi al secondo postulato di Euclide (Libro I°): "… e che ogni retta terminata si possa prolungare continuamente, per diritto." o alla proposizione 20 del Libro IX°:

"Siano dati quanti si vogliano numeri primi a, b, c. Dico che i numeri primi sono in numero maggiore di a, b, c.". Noi diciamo oggi brevemente : "I numeri primi sono infiniti".

L'infinito del calcolo infinitesimale

Il concetto di limite è basato sugl'infiniti e sugli infinitesimi potenziali. Infatti la frase: *la variabile reale x tende a +infinito* sta per: *x supera ogni numero prefissato*, *x tende a –infinito* significa: *x* è (*diventa) minore di ogni numero prefissato*, *x tende a zero (x è infinitesimo)* sta per: *il valore assoluto di x è minore di ogni numero positivo prefissato* (senza essere zero).

In tal modo il calcolo infinitesimale evita i pericoli che un uso troppo libero di infiniti e infinitesimi attuali può far correre. Si pensi agli indivisibili di Cavalieri e alle figure (piane e solide) concepite come somma di infiniti infinitesimi, con la paura incombente di paradossi come quelli di Zenone. Ancora più rischiosa si dimostrò la manipolazione spregiudicata delle serie, che spesso si sommavano al di fuori del loro campo di convergenza. Emblematico è il caso della serie geometrica

$1 + x + x^2 + x^3 + \dots x^n + \dots$ convergente a $\frac{1}{1-x}$, purché il valore assoluto di x sia minore di 1 e che Eulero (1707 – 1783) applica anche ad x=-1, con risultati paradossali. Infatti, per x = -1, la serie è indeterminata e ad essa non si può applicare la proprietà associativa, non è lecito estendere a una somma di infiniti addendi una proprietà valida per una somma finita. La serie, per x = -1, si può scrivere : (1-1)+(1-1)+(1-1)+… =0, oppure, associando diversamente i termini: 1+(-1+1)+(-1+1)+…=1. Se poi si pone -1 nella frazione alla quale converge la serie per $|x| \prec 1$, si ottiene 1/2.

Bisogna aspettare Cauchy (1789 – 1857) e Weierstrass (1815 – 1897) per una teoria rigorosa dei concetti di infinito e infinitesimo potenziali e per una sistemazione soddisfacente dell'analisi.

Un'interessante successione che è stata introdotta da Leonardo Pisano detto il Fibonacci (1180 – 1250) è la seguente: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,… nella quale ogni termine, esclusi i primi due, è la somma dei due che lo precedono. La successione fu inizialmente presentata sotto forma di problema di crescita (idealizzata) di una famiglia di conigli, se ogni coppia adulta genera una coppia di conigli al mese e se una coppia diventa fertile all'età di un mese (e nessun coniglio faccia una brutta fine). Non cambia niente se si assume come primo termine lo zero; basta dire a(0)=0, a(1)=1, a(2)=1, a(3)=2, a(4)=3, a(5)=5, … La formulazione successiva diventa più semplice. (A proposito, fu il Fibonacci a introdurre in Italia dai suoi viaggi d'affari in Africa settentrionale lo zero e le cifre indoarabe.)

Il problema di calcolare l'ennesimo termine della successione di Fibonacci richiede la conoscenza dei due precedenti e perciò è suscettibile di un'elegante formulazione *ricorsiva* facilmente traducibile in un algoritmo, ricorsivo appunto, implementabile su un computer:

Sia n un numero naturale; se n<2 allora a(n)=n altrimenti

(1) **a(n)=a(n-1)+a(n-2).**

Si può trovare a(n) usando un algoritmo iterativo, meno elegante ma più economico in termini di impegno di memoria.

Una generalizzazione della successione si ottiene ponendo a(0)=α, a(1)=β.

La (1) è un'equazione alle differenze finite. E' possibile risolverla in forma chiusa, che non richiede né la ricorsione né l'iterazione, cercando soluzioni del tipo $a(n) = \lambda^n$, che ricalca il metodo di ricerca delle soluzioni particolari di un'equazione differenziale (omogenea, del 2° ordine, a coefficienti costanti). Sostituendo nella (1) si ottiene un'equazione di 2° grado avente le soluzioni $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e quindi $a(n) = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$. Le due costanti si ricavano dalle condizioni iniziali a(0)=α, a(1)=β.

Nel caso particolare a(0)=0, a(1)=1, si ottiene $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{5}}$, e infine

(2) $$a(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

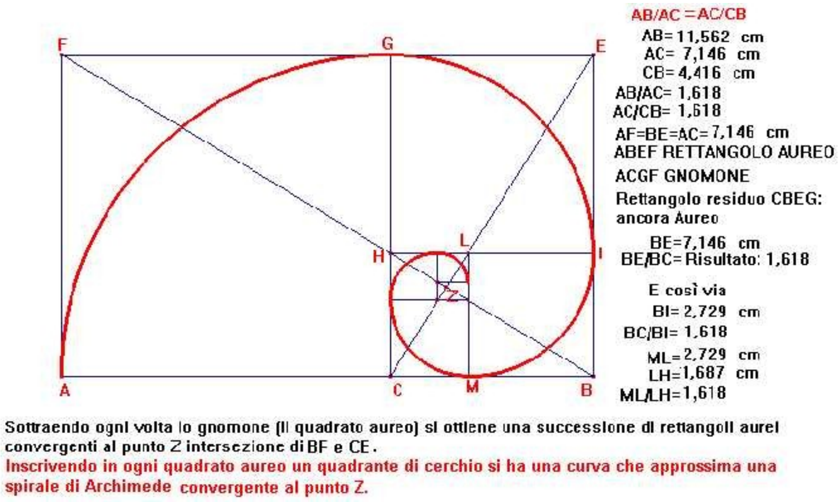
E’ notevole che la (2) dia una successione di numeri naturali, anche se è presente un termine irrazionale. Lo stesso succede tutte le volte che a(0) e a(1) sono assunti interi.

Si noti poi che nella parentesi quadra la prima potenza tende a $+\infty$, la seconda tende a zero, perché la base è in modulo minore di 1. In ogni caso, e qualunque sia la scelta delle condizioni iniziali, vale il seguente notevole limite:

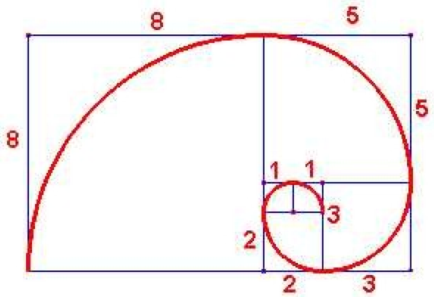
(3) $$\lim_{n \to \infty} \frac{a(n+1)}{a(n)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

che è il rapporto tra la lunghezza di un segmento e la sua sezione aurea.

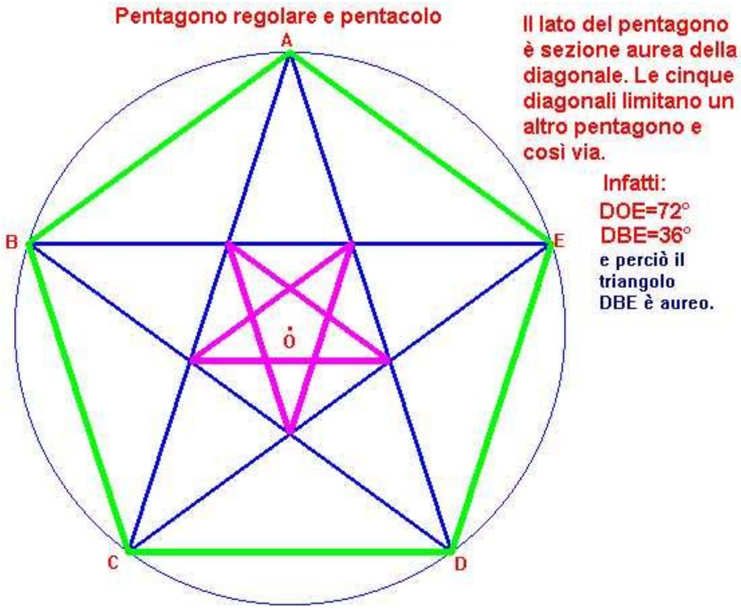
Interessanti relazioni tra la sezione aurea e i numeri di Fibonacci si trovano in un brillante articolo del matematico Piergiorgio Odifreddi sul numero di “Le Scienze” di Novembre 2004, dal quale ho preso lo spunto per la costruzione delle seguenti figure, realizzate con WinCabri2.



Anche nella figura successiva si ottiene l’approssimazione di una spirale di Archimede, inscrivendo quadranti di circonferenza in una successione di quadrati i cui lati hanno lunghezza di misura uguale ai numerici Fibonacci.



Si dimostra facilmente che in un pentagono regolare i lati sono la sezione aurea delle diagonali. Queste costituiscono una stella a cinque punte (*pentacolo*) e delimitano un altro pentagono le cui diagonali… Si ottiene perciò una successione infinita di pentagoni e di *pentacoli* convergenti al centro dei pentagoni. (*Il codice da Vinci* di Dan Brown non c'entra). Si veda la figura seguente.



Tutta l'analisi matematica classica, dal '600 al '900, è basata sull'uso dei concetti di infinito e di infinitesimo potenziali. I matematici moderni hanno raffinato e potenziato gli schemi concettuali dei Greci codificati da Aristotele e resi fecondi da Eudosso ed Archimede. Nel secolo XIX° il matematico tedesco Kronecker spinse il suo desiderio di una base "sicura" per la matematica fino a respingere anche le dimostrazioni di esistenza degli enti matematici non fondate su metodi costruttivi. Respinse perciò le dimostrazioni di esistenza dei numeri trascendenti e addirittura dei numeri irrazionali, dando diritto di cittadinanza soltanto all'infinito (potenziale) dei numeri naturali: dato un numero, ne esiste uno maggiore, il successivo. A maggior ragione si scagliò contro la teoria degli insiemi di Cantor dei numeri *transfiniti*, che richiedono la legittimità logica dell'infinito attuale.

La teoria degli insiemi e l'infinito attuale.

Nella teoria di Cantor (1845 – 1918) gli insiemi sono concepiti come dati in atto, cioè come oggetti completi nella loro esistenza (matematica), non come costruzioni che si vanno progressivamente ampliando. E' pertanto lecito parlare non solo di insiemi finiti, come dati nella loro totalità, concetti contro i quali non avrebbe niente da eccepire neanche Kronecker, ma anche dell'insieme dei numeri naturali o di suoi sottoinsiemi infiniti, come i pari o i primi o i quadrati perfetti; così pure dei numeri interi, dei numeri razionali, dei numeri reali. La denominazione di insiemi *infiniti*, come suggerisce il nome, è data per negazione, *non finiti*. Il matematico Dedekind, contemporaneo di Cantor, dà una definizione che si rivelò molto fruttuosa. Dopo aver osservato che un insieme finito non si può porre in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria, definisce un insieme **infinito** come un insieme che si può porre in corrispondenza biunivoca con una parte propria. Per esempio, l'insieme P dei numeri pari è un sottoinsieme proprio dell'insieme N dei numeri naturali e infatti esiste (tra le innumerevoli altre) la seguente funzione biunivoca di N su P : f(n) = 2.n .

Già Galilei aveva osservato che i quadrati perfetti sono in corrispondenza biunivoca con (tutti) i naturali, per cui sembra che siano tanti quanti, d'altra parte gli sembra *evidente* che i quadrati perfetti siano di gran lunga meno numerosi, perciò conclude che di fronte all'infinito la mente umana si smarrisce.

Cantor invece pone arditamente questa definizione:

Due insiemi A e B sono equipotenti (hanno la stessa cardinalità o numerosità) se esiste tra essi una corrispondenza biunivoca. In tal caso pone Card(A)=Card(B). Se A è equipotente a una parte propria di B, ma non è equipotente a B, dice che Card(A)<Card(B).

Poi, dopo aver chiamato infinità numerabile la cardinalità di N, dimostra (è abbastanza semplice) che anche l'insieme Z degli interi e l'insieme Q dei razionali sono numerabili. Card(Q)=Card(N). E già, si potrebbe pensare, nella notte dell'infinito tutti i gatti sono grigi.

Invece, con sua grande sorpresa, scopre che ci sono gatti più grigi: l'insieme R dei numeri reali ha cardinalità maggiore del numerabile: Card(R)>Card(N). La dimostrazione,che è diventata classica, procede per assurdo seguendo uno schema detto *della diagonalizzazione.*[1]

La considerazione dell'insieme *potenza* o insieme delle parti, cioè dell'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme dato, e la dimostrazione che esso ha cardinalità maggiore dell'insieme di partenza, permette a Cantor di costruire una gerarchia infinita di infiniti sempre più grandi: i transfiniti. In particolare, siccome le funzioni di R in R (le funzioni reali) formano un insieme equipotente a Parti(R), segue che l'insieme delle funzioni reali ha cardinalità maggiore di R.

(Vedi nota 1, oppure [2]).

Questa torre di Babele di transfiniti condusse però a dei paradossi, le *antinomie* dell'infinito, che rischiarono di far crollare tutta la teoria.

Il fatto è che nella teoria originale, ora detta teoria *ingenua*, Cantor, dopo aver osservato che ogni insieme gode di una proprietà caratteristica, una proprietà di cui godono solo gli elementi dell'insieme e nessun altro, crede di poter impunemente invertire questa osservazione e afferma che ogni proprietà definisce un insieme. In particolare, crede di poter affermare l'esistenza dell'insieme *UNIVERSALE U*, insieme di tutti gli insiemi. Ma anche B=Parti(U) è un insieme, perciò $Card(B) \leq Card(U)$. D'altra parte, per il teorema dell'insieme potenza, $Card(B) > Card(U)$. Siamo perciò in presenza di una contraddizione.

C'è un'altra contraddizione nella teoria ingenua, evidenziata da Russell (1872 – 1970) all'inizio del '900. Ci sono insiemi che non sono elementi di se stessi, come l'insieme dei numeri naturali che **non è** un numero naturale o come l'insieme dei cavalli che **non è** un cavallo: tali insiemi chiamiamoli Normali. Ci sono poi insiemi che **sono** membri di se stessi, come l'insieme dei concetti. Diciamo *R* l'insieme di tutti gli insiemi normali e chiediamoci: *R* è normale o no? Comunque si risponda, si cade in contraddizione. Infatti, dalla definizione di *R*: $X \in R \Leftrightarrow X \notin X$ segue, ponendo *R* al posto di *X*: $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ (R è membro di R se e solo se R non è membro di R), che è, chiaramente, una contraddizione.

Tra le varie soluzioni proposte per evitare le antinomie ricordo

a) Brouwer: buttiamo a mare gli insiemi di Cantor e fondiamo la matematica su basi costruttive (matematica intuizionista di Brouwer(1881 – 1966) e Heyting); però si sacrifica molta matematica alla quale, come disse Hilbert, non vogliamo rinunciare.
b) Russell: Teoria dei tipi (Russell e Whitehead nel trattato *Principia matematica*, tre voll. pubblicati dal 1925 al 1927).
c) Zermelo e Fraenkel: Teoria assiomatica degli insiemi, inizio del '900; si introduce un sistema di assiomi che impediscono l'apparizione delle antinomie note; il concetto di insieme è assunto come primitivo[3].
d) Kelley e Morse: teoria assiomatica come quella di Zermelo e Fraenkel; si introducono il concetto primitivo di classe e la relazione di appartenenza tra classi, un insieme è definito come una classe che sia membro di qualche altra classe[4].

Nella teoria di Kelley e Morse le antinomie ricordate sopra appaiono in una nuova luce: come dimostrazione per assurdo che alcune classi non sono insiemi.

La matematica però non è al sicuro da eventuali contraddizioni future, perché senza l'infinito non c'è matematica, ma l'infinito, anche quando crediamo di averlo imbrigliato, non è mai ad-

[1] Herbert Meschkowski: " Mutamenti nel pensiero matematico", Boringhieri Torino 1963. (Facile)
[2] ClaudioCitrini: "Da Pitagora a Borges" (Discussioni in rete sull'infinito), mondatori Milano 2004. (Facile)
[3] Paul Halmos: "Teoria elementare degli insiemi", Fektrinelli Milano 1970. (Media difficoltà)
[4] Donald Monk: "Introduzione alla teoria degli insiemi", Boringhieri Torino 1972. (Difficile)

domesticato. Sui risultati ottenuti in questo campo negli anni 30 del secolo XX dal grande logico Kurt Godel non posso soffermarmi, perché *"non mi lascia più ir lo fren dell'arte"*. [5]

Tuttavia vorrei aggiungere qualcosa su una famosa congettura di Cantor, che ha avuto una risposta sorprendente.

L'ipotesi del continuo.

La cardinalità di R, o del continuo come viene chiamata per il postulato di corrispondenza biunivoca tra R e la retta euclidea, fu il primo numero transfinito trovato da Cantor dopo l'infinito numerabile. Egli avanzò la congettura che tra il numerabile e il continuo non ci fosse nessun transfinito intermedio. Questa congettura è detta ipotesi del continuo.

Nella teoria assiomatica di Zermelo - Fraenkel o di Kelley – Morse l'ipotesi del continuo, come anche l'assioma di scelta[6] enunciato esplicitamente da Zermelo nel 1908, potevano essere conseguenza degli altri assiomi oppure contraddittori con essi, nel qual caso la teoria sarebbe andata di nuovo in crisi. L'incertezza si trascinò fino al 1938, quando Godel dimostrò che essi non potevano essere confutati in base agli altri assiomi. Ciò significò che, se contraddizione c'era nella teoria assiomatica, i responsabili erano gli altri assiomi, quelli che costituiscono la cosiddetta teoria *ristretta* degli insiemi. Questo risultato liberò i matematici dall'incubo di dover sacrificare tutti i teoremi ottenuti con i due postulati incriminati. Il risultato di Godel però non significava che essi erano deducibili dagli altri assiomi.

Il problema ebbe soluzione definitiva nel 1963 quando l'americano Paul Cohen dimostrò che neanche la negazione dei due assiomi poteva essere confutata dalla teoria ristretta[7]. In altri termini, se agli assiomi della teoria ristretta si aggiungono l'ipotesi del continuo e l'assioma di scelta, si ottiene la cosiddetta teoria *standard* degli insiemi, quella usata correntemente dai matematici fino ad oggi; se agli assiomi della teoria ristretta si aggiungono le negazioni dei due assiomi in oggetto, si ottiene un'altra teoria, che Cohen chiama *Teoria non cantoriana degli insiemi,* per analogia con la le geometrie *non euclidee*[8].

Mentre però la geometria non euclidea, precisamente la geometria *ellittica* di Rieman (1826 – 1866), estesa da due a quattro dimensioni, ebbe applicazione clamorosa (al di fuori della matematica pura) nella teoria della relatività generale, allo stato presente non si sa quali utilizzazioni potrà avere la teoria non cantoriana degli insiemi nelle scienze della natura.

Ma questi sono problemi che riguardano la matematica applicata.

---

[5] Dante: "Purgatorio", XXXIII, 141.

[6] Vedi Halmos o Monk o Cohen (nota 7). Esso afferma che, data una classe di insiemi, esiste un insieme (*Insieme delle scelte*) contenente uno e un solo elemento di ciascun insieme della classe. Per classi infinite, in generale, non si può indicare un criterio di scelta e perciò l'assioma fu guardato con sospetto da molti matematici, non solo intuizionisti, anche se tanti altri lo usarono con successo per dimostrare rapidamente teoremi profondi. Per esempio, è stato dimostrato che ogni insieme si può *ben ordinare*, cioè ordinare in modo che ogni suo sottoinsieme abbia un primo elemento, come accade, e si prova facilmente, per gli insiemi numerabili.

[7] Paul Cohen: "La teoria degli insiemi e l'ipotesi del continuo", New York 1966, Feltrinelli Milano 1973. (Molto difficile)

[8] Paul Cohen e Reuen Hersh: "La teoria non cantoriana degli insiemi", da Le Scienze N°1 settembre 1968. (Facile)