Ottavio Serra9.

Liceo Scientifico 2024 Soluzioni

Problema 1.

a)) Trova a e b. P(1;a+b); a+b=-7+12=5. La f(x)=ax+b/x2, f'(x)=a-2b/x^3; f'(1)=a-2b=-7.

Perciò (a+b)-(a-2b)=5-(-7), 3b=12, **b=4** e **a=1**. Con questi valori P=(1; 5) e si va al punto **b).**

b) $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}=x++\frac{4}{x^2}$. $D=R-\{0\}$. Asintoto verticale x=0, asintoto obliquo y=x (facile).

Il grafico passa per ($-\sqrt[3]{4}$; 0) e ha minimo relativo per x=2 (vedi f'). M_{locale}=(2:3).Vedi fig.1

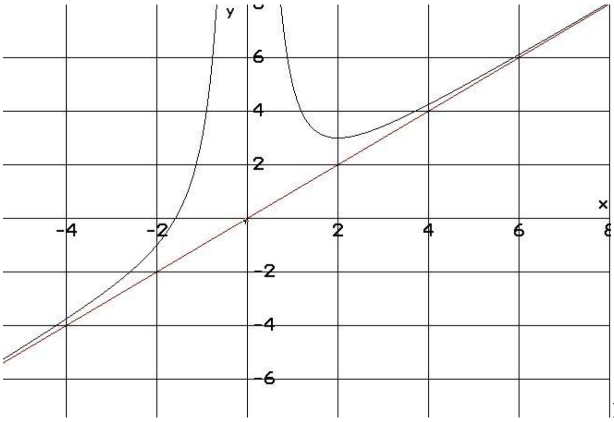

fig.1

In questo punto la traccia chiede l'equazione dell'ulteriore retta tangente al grafico passante per il punto P(1; 5). Da grafico di fig.1 si intuisce che tale tangente tocca il grafico nel ramo di sinistra, delle x<0.

Si fa sistema tra l'equazione del grafico, y=f(x)=x+4/x^2, con l'equazione della generica retta del fascio di centro P, y=mx+5-m, si semplifica la risolvente di 3° grado della radice fissa x=1 (ascissa di P) e si annulla il discriminante dell'equazione residua di 2° grado. Si trova m=2, tangente y=2x+3, punto di contatto Q(-2; -1). Vedi il successivo punto **c).**

c) La traccia dà l'equazione del fascio di rette di centro P(1;5): y=mx+5-m. Facendo sistema con l'equazione di f, si ha la risolvente **[1] (m-1)x^3+(5-m)x^2-4=0**, equazione di 3° grado, una retta del fascio interseca il grafico al più in tre punti reali. Uno di tali punti è proprio P, con x=1. Restano perciò altri due punti (reali) possibili, di ascissa le radici dell'equazione residua (dividere per x-1):

[2] (m-1)x^2+4x+4=0. Il discriminante ridotto è 4-4m+4=8-4m, ≥ 0 per m≤ 2. Per m=2, si ha la soluzione doppia x= -2; la retta del fascio y=2x+3 è tangente al grafico nel punto Q(-2; -1), sul ramo sinistro del grafico. Per m=1, retta del fascio parallela all'asintoto obliquo, si ha x=-1, oltre alla **soluzione *fissa* x=1**. Ma un'equazione algebrica a coefficienti **reali** non può avere **una** (un numero **dispari**) di soluzioni complesse, queste vanno a **coppi coniugate**, perciò dobbiamo concludere che la terza soluzione va all'infinito, è l'ascissa del ***punto improprio*** dell'asintoto obliquo.

Si può controllare, trovando le radici della **[2]** e facendone il limite per n->1; una soluzione tende a -1, l'altra tende a infinito.

Per **m>2 si** ha una sola intersezione reale, per x=1 ascissa di P, le altre due sono complesse coniugate.

d) L'area S(x) si deve esprimere come somma di due aree: $S(k)=S_1+S_2(k)$.

$$S_1 = \int_1^{3/2} (x+4/x^2+7x-12)dx = \left[4x^2-4/x-12x\right]_1^{3/2} = (9-8/3-18)-(4-4-12) = 3-8//3 = 1/3..$$

$$S_{2(}(k) = \int_{3/2}^{k} (x+4/x^2-x)dx = \left[-4/x\right]_{3/2}^{k} = (-4/k)-(-8/3) = 8/3-k/4$$. Segue

S(k)=3-4/k. Perciò il limite di S(k), per k->+∞, vale 3.

Si noti che 4/k rappresenta la **coda,** da x=k a x->+∞, della regione, sempre più sottile, compresa tra il grafico di f(x) e l'asintoto obliquo. Vedi fig.2

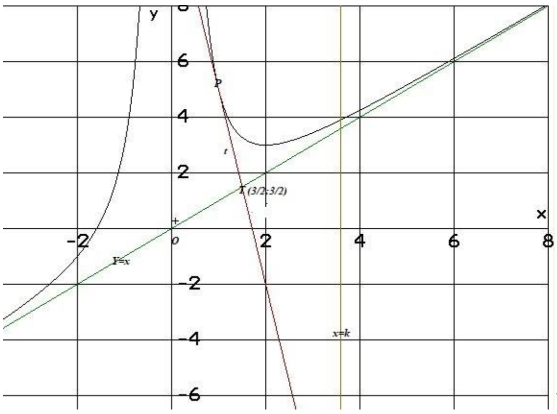

fig.2

Complemento. Facendo ruotare intorno all'asintoto obliquo l'arco del grafico per x che va da 0 a +∞, si ottiene una superficie che sembra una tromba infinitamente lunga. Calcolare il volume del solido racchiuso dalla superficie.

Problema 2.

La funzione proposta è $f(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt{ax^2+bx+1}$, con a e b reali, a<0, n naturale >1.

a) Per n=2, il punto con x=0 è angoloso (derivata destra di f =1, derivata sinistra =-1); per n>0 f'(x) tende a infinito per x tendente a 0. Dunque f(x) non è derivabile per x=0.

Si chiede poi di porre n=2 e di richiedere che il grafico α di f sia simmetrico rispetto all'asse y e che f(1)=1. La simmetria impone b=0 e la condizione f(1)=1 richiede a=-1. La funzione da studiare è perciò $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$. Il dominio è [-1; 1] e agli estremi non è derivabile (Il limite della derivata è infinito).

b) la funzione $g(x) = |x| + \sqrt{1-x^2}$ ha lo stesso dominio di f(x), come la f ha tangenti verticali agli estremi del dominio e ha il punto angoloso (0;1). La derivata, per x>0, è $g'(x) = 1 - x/\sqrt{1-x^2}$ =0 per x=$1/\sqrt{2}$, dove g(x) ha un massimo locale di valore y=$\sqrt{2}$. Siccome g(x) è pari, c'è un massimo locale di uguale valore per x=$-1/\sqrt{2}$ .Il massimo locale è anche massimo assoluto. Il suo grafico β, unito al grafico α di f, dà il grafico γ, che ha l'aspetto di un cuore (di una **sezione piana**, vedi fig. 3).

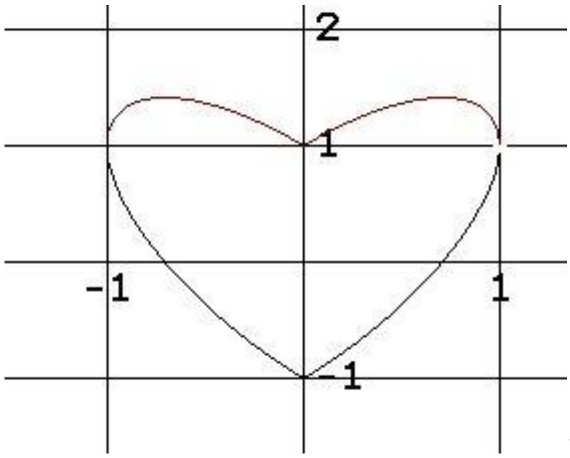

fig.3

c) PQ è g(x)-f(x)= $2\sqrt{1-x^2}$, la cui derivata è $-x/\sqrt{1-x^2}$, segue che il massimo di PQ si ha per x=0 e vale 2.

d) L'area S della regione racchiusa dalla curva γ è $S = 2\int_0^1 [g(x) - f(x)]dx = 2\int_0^1 2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Qui il Ministero, non avendo fiducia nelle competenze matematiche degli studenti, ha voluto dare un ***aiutino***, suggerendo la primitiva dell'integrando. La sostituzione x=sen(t) permette di calcolare l'integrale, anche non conoscendo la funzione arcseno.

$S = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)dt = 4\left[\frac{1}{2}(t + sen(t)\cos(t\right]_0^{\pi/2} = \pi$ (Usare la formula di bisezione del coseno. In alternativa, integrare per parti.

Visto che questo problema 2 è molto semplice, suggerisco il seguente complemento. Calcolare il volume del solido che si ottiene facendo ruotare la fig. 3 intorno all'asse delle y.

Suggerimento. Riempire il solido di rotazione con croste cilindriche di spessore x+dx -x e altezza g(x)-f(x).

Sapreste calcolare l'area racchiusa dalla curva γ di fig. 3 e il volume del solido di rotazione qui proposto senza utilizzare alcuna tecnica di calcolo integrale, conoscendo solo un po' di geometria analitica e qualche formula elementare per aree e volumi? Se avete l'idea giusta, troverete i risultati a vista, senza carta e penna.

Questionario

1. Detto O il punto medio di AC, traccio la circonferenza di centro O e diametro AC. Siccome l'angolo ABC è retto, il punto B appartiene alla circonferenza e perciò BH=BO. Segue che il triangolo HBO è isoscele e gli angoli alla base HO sono uguali. Ma l'angolo in H è retto per ipotesi, dunque anche l'angolo in O è retto. Ma in un triangolo la somma di due angoli è minore di due retti, perciò H e O coincidono. In tal caso è altezza e mediana, i triangoli BAH e BCH sono uguali (1° criterio) e BA=BC: il triangolo rettangolo ABC è isoscele. **Viceversa**, se BA=BC, il triangolo ABC è isoscele e l'altezza BH è mediana, perciò BH è la metà di AC.

2. Se la probabilità di Testa è p, quella di croce è q=1-p (Si esclude che la moneta resti in bilico, in equilibrio instabile). La probabilità di avere testa 2 volte (su 5 lanci) è p^2q^3, se si fissa l'ordine degli eventi, ma nel quesito non si impone alcun ordine, perciò la probabilità è $\binom{5}{2}p^2q^3 = 10p^2(1-p)^3$.

Questa probabilità è massima se la derivata rispetto a p è zero. $2p(1-p)^3-p^2.3(1-p)^2=0$. Segue, supponendo che p non sia né 0 né 1, 2(1-p)=3p, cioè p=2/5=0,4 (40%). La probabilità dell'evento è $10x0,4^2x0,6^3=0,3456$.

3. Una normale al piano è il vettore (3, -2, 0) e la retta r per P ortogonale al piano è x=4+3t, y=2-2t, z=1. Il punto H è il piede della perpendicolare e si determina imponendo che un punto di r appartenga al piano: 3(4+3t)-2(2-2t)+5=0, da cui 13t+13=0, t=-1. Perciò H(1, 4, 1) .

x-y+1=0, z-2=0, 3x-2y+5=0. Sostituendo, 3x-2(x+1)+5=0, x=-3, y=-2, z=2.

4. Posto $f(x)=x^3+x-\cos(x)$, f(x) è derivabile su tutto l'asse reale, con derivata >0, perciò la funzione f(x) è monotòna crescente e siccome va da valori negativi a valori positivi, ha un solo ***zero***. Risulta f(0)=-1, , f(1)=2-cos(1)>0, perciò lo zero cade tra 0 e 1 ed è positivo.

5. la prima condizione impone che $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2$; la seconda condizione impone a+b+c=0, la terza richiede due condizioni: 16a+8b+4c=-2 e 32a+12b+4c=0 ovvero 8a+4b+2c=-1 e 8a+3b+c=0.

Dalla prima e dalla terza equazione si ricava b=-7a/2, c=5a/2. Sostituendo nella seconda si ha

8a-14a+5a=-1, da cui a=1, b=-7/2, c=5/2. $P(x=x^4-(7/2)x^3+(5/2)x^2$.

6. Posto t=1/z), F(x)= $F(x) = \int_{1/a}^{1/x} \cos(z).z^2(-1/z^2)dz = sen(1/a) - sen(1/x)$. Imponendo F(2/π)=-1/2, si ha sen(1/a)-sen(π/2)=-1/2, sen(1/a)=+1/2, $(1/a)_{min} = \pi/6$, $a_{max}=6/\pi$.

7. Il semiasse maggiore dell'ellisse è $a=(d_{afelio}+d_{perielio})/2= (1,52+1,47)/2 \times 10^{11}$ m$=1,495\times10^{11}$ m. La distanza focale $c=(a-d_{perielio})=0,025x10$ e il semiasse minore è $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 10^{11}\sqrt{1,52^2 - 0,025^2} = 1,51979x10^{11}$ m (l'orbita è quasi circolare: $x^2/a^2+y^2/b^2=1$.

8. In un esagono regolare il lato è uguale al raggio del cerchio circoscritto, perciò l'apotema a è

$a = \sqrt{r^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{r}{2}\sqrt{3} = r.0,8660254...$. Gadda dice che a/r=51,96/60=0,866 la differenza è di qialche centomillesimo, minore di 3.10^{-5}.

Affinchè un pavimento si possa piastrellare con mattonelle tutte uguali, a forma di poligono regolare, occorre che in un punto P del pavimento in cade un vertice di una mattonella z mattonelle abbiano un vertice in P, con z numero naturale, in modo che, detto α l'angolo interno di una mattonella, $z\alpha$ sia uguale all'angolo gito; ciò garantisce che non restino lacune o sovrapposizioni. Siccome in poligono regolare di n lati$\alpha=(n-2)\pi/n$, occorre che α sia un sottomultiplo (intero) di 2π. Il poligono **regolar**e col più piccolo numero di lati è il triangolo, $\alpha=\pi/3$ (60°) che è 1/6 di angolo giro e va bene. Segue il quadrato, con α90° e va bene. Il pentagono **non va bene**, perché α=108°. L'esagono va bene perché α=120°, che è 1/3 di giro (z=3). Nessun altro poligono (regolare) va bene, perché la frazione (n-2)/n cresce con n, perciò z dovrebbe essere minore di 3M minori di 3 ci sono solo 2 e 1. Per z=2 $(n-2)\pi z=2\pi$ implica (n-2)/n=1: impossibile. Per n=1, (n-2)/n=2: ancora peggio.

Si conclude che il piano si può pavimentare con triangolo equilateri (6 concorrenti in ogni vertice), con quadrati (4 concorrenti in ogni vertice) e con esagoni regolare (3 concorrenti in ogni vertice).