Ottavio Serra

Raccolta di quesiti di calcolo combinatorio e di probabilità

assegnati agli esami di stato dal 2001 al 2015

e altri assegnato all'estero,

più qualcuno ideato dal sottoscritto.

Alcuni miei *commenti* (sono in **rosso**).

Calcolo combinatorio

[2001, ORD] Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali, con n > k > 0. (*E' la formula iterativa del "triangolo di Tartaglia". Vedi appendice*).

[2003, ORD] Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1:

1, 2, 3, . . , n-1, n

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti risulta uguale a:

$$A)\ \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

$$B)\ \frac{1}{3}n(n^2-1)$$

$$C)\ \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$$

$$D)\ \frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

(Dopo aver escluso, con l'induzione empirica (del "tacchino") tre delle quattro risposte, quella che resta deve essere corretta, perché lo dice il ministero (e perché lo studente è agli sgoccioli del tempo disponibile). Ma il matematico non si accontenta, a volte la traccia ministeriale è risultata sbagliata. Bisognerebbe allora sottoporre il quesito che ha superato il test empirico all'induzione numerabile di Peano, solo che in questo caso il procedimento è laborioso, però vi assicuro che conferma la formula. *[Un esempio di quesito sbagliato è* "Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = \arctan(x) - \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ è costante, indi (*che avverbio chic*!) si calcoli il valore di tale costante". Quesito N° 10, Liceo scientifico, corso di ordinamento, anno 2005]. *Cercate di capire che cosa c'è di sbagliato in tale quesito).*

[2003, ORD] Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90. *(mi gioco l'ambo!).*

[2004, ORD e PNI] Considerate gli insiemi A = {1,2,3,4} e B = {a, b, c}; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B? *(Disposizioni con ripetizione. Generalizzare al caso di A con a elementi e B con b elementi. Provate a determinare il numero dell funzioni iniettive di A in B: quale limitazione bisogna imporre ai numeri a e b? Se si chiede il numero delle funzioni suriettive, veramente piuttosto difficile da calcolare, quale limitazione bisogna imporre ad a e b?)*

[2006, ORD e PNI] Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore. *(Progressione geometrica, eccetera. Storiella conosciuta anche da Dante, che la riporta nel XXVIII° canto del Paradiso: "… ed eran tante che il numero loro più che 'l doppiar de li scacchi s'inmilla").*

[2006, ORD e PNI] Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è 2^n.

[2007, ORD] Si risolva l'equazione:

$$4\binom{n}{4}=15\binom{n-2}{3}$$

Probabilità e statistica

[2001, PNI] Una classe è composta da 12 ragazzi e 4 ragazze. Tra i sedici allievi se ne scelgono 3 a caso; qual è la probabilità che essi siano tutti maschi? *(Prob. condizionata. Idem, 2 maschi e una ragzza).*

[2002, PNI] Il seguente è uno dei celebri problemi del Cavaliere di Merè (1620-1685) amico di Blaise Pascal: "giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi?"*(Distribuzione di Bernouilli).*

[2002, PNI] Assumendo che i risultati (X, 1, 2) delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità. *(Bernouilli).*

[2003, PNI] Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. La scatola A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.

Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Quale è la probabilità che essa sia difettosa?

[2005, PNI] Quale è la probabilità di ottenere (somma) 10 lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci? **(Bernouilli).**

[2005, PNI] Il 40% della popolazione di un Paese ha 60 anni o più. Può l'età media della popolazione di quel Paese essere uguale a 30 anni? Si illustri il ragionamento seguito per dare la risposta. *(Vedi soluzione in Appendice).*

[2006, PNI] Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità ≥ 0,99 (99%) di colpirlo almeno una volta? *(1-P(nessun successo).*

[2007, PNI] Si consideri la funzione:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, di σ e di σ al quadrato e come tali parametri influenzino il grafico di f(x). *(E' la funzione densità della distribuzione di Gauss. E' di fondamentale importanza. Si richiede il concetto di probabilità in uno spazio continuo).*

PNI 2007:

Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3. Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1. *(E' una questione di aree).*

Ordin 2008:

Se $\binom{n}{1},\binom{n}{2},\binom{n}{3}$ (con n>3) sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

(Per chi non lo sa: una successione {an} si chiama progressione aritmetica se $a_n-a_{n-1}=d$ costante).

PNI 2008:

In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse? *(Proabilità condizionata oppure usare la cosiddetta distribuzione ipergeometrica, a probabilità variabile).*

Ordin 2009:

Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ *(Vedi soluzione in Appendice).*

PNI 2009:

Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media degli uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne? *(Io dico ¾; e voi? Vedi soluzione in Appendice).*

Ordin 2010:

Se $\binom{n}{n-1},\binom{n}{n-2},\binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, quanto vale n? *(Identico a Ordin 2008).*

PNI 2010:

Per la ricorrenza della festa della mamma, la sig.ra Luisa organizza una cena a casa sua, con le sue amiche che hanno almeno una figlia femmina. La sig.ra Anna è una delle invitate e perciò ha almeno una figlia femmina. Durante la cena, la sig.ra Anna dichiara di avere esattamente due figli. Si chiede: qual è la probabilità che anche l'altro figlio della sig.ra Anna sia femmina? Si argomenti la risposta. *(Attenzione, i figli sono "oggetti" macroscopici, non quantistici, e perciò distinguibili).*

Ordin 2011:

Il numero delle combinazioni di *n* oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi *n*.

PNI 2011:

Un test d'esame consta di dieci domande, per ciascuna delle quali si deve scegliere l'unica risposta corretta fra quattro alternative. Quale è la probabilità che, rispondendo a caso alle dieci domande, almeno due risposte risultino corrette? *(Bernouilli)*

Ordin 2012:

Siano dati nello spazio *n* punti P_1, P_2, P_3, …. P_n. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)? *(Combinazioni)*

PNI 2012:

Una moneta da un euro (il suo diametro è 23,25 mm) viene lanciata su un pavimento ricoperto di piastrelle esagonali regolari di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a cadere nell'interno di una piastrella (cioè non tagli i lati esagonali)? *(Una scusa per fare geometria).*

PNI 2012:

Un'azienda possiede tre stabilimenti (A, B, C). Nello stabilimento A si produce la metà dei pezzi e di questi il 10% sono difettosi. In B si produce un terzo dei pezzi e di questi il 7% sono difettosi. Nello stabilimento C si produce il rimanente dei pezzi e di questi il 5% sono difettosi. Sapendo che un pezzo è difettoso, qual è la probabilità che provenga dallo stabilimento A? *(Formula di Bayes).*

Ordin 2013:

Con le cifre da 1 a 7 si possono formare 7!=5040 permutazioni. Se queste permutazioni si dispongono in ordine crescent, qual è il numero che occupa la 7ma posizione e quale quello che occupa la 721ma posizione?

PNI 2013:

Come sopra, quale numero occupa la posizione 5036 e quale la posizione 1441?

PNI 2013:
In un gruppo di 10 persone il 60% ha gli occhi azzurri. Se ne scelgono a caso due: qual'è la probabilità che nessuno dei due abbia gli occhi azzurri? *(Probabilità condizionata. Idem, uno azzurro e uno no).*

Ordin 2014:

Nello sviluppo di $\left(2a^2-3b^3\right)^n$ compare il termine $-1080.a^4.b^9$: qual è il valore di n?

(Formula del binomio. A mente: n=...).

Ordin 2014:

Il valore medio di $f(x)=x^3$ in [0; k] è 9; si determini k. *(Ricorda che* $\overline{f}(x)_{[a;b]}=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$*).*

PNI 2014:
Venti palline sono poste in un'urna. Cinque sono rosse, cinque verdi, cinque gialle e cinque bianche. Dall'urna si estraggono a caso, senza reimbussolamento, tre palline. Si valutino le seguenti probabilità:

a) esattamente una pallina è rossa;

b) le tre palline sono di colori differenti.

PNI 2014:
La "*zara*" è un gioco d'azzardo di origine araba che conobbe particolare fortuna in Italia in epoca medievale – ne parla anche Dante nella *Divina Commedia* – e si giocava con tre dadi. Si confronti la probabilità di ottenere in un lancio la somma 9 con quella di ottenere la somma 10. *(Galilei risolve correttamente il problema sottopostogli di spiegare come mai, lanciando due dadi, a lungo andare si vince puntando sulla somma 7. Egli sostiene, giustamente, che vanno contate le disposizioni, per esempio 1+4 e 4+1 non sono identificabili. Ciò, perché due oggetti "identici" macroscopici: due dadi, due monete, sono distinguibili in linea di principio, si possono marcare con un segno di matita o anche "seguirli" con gli occhi, cioè marcarli con fotoni. Le cose vanno diversamente per oggetti quantistici: elettroni, fotoni, per i quali non vale la statistica classica di Maxwell-Boltzmann, ma quella di Bose-Einstein: bosoni, particelle a spin intero, o quella di Fermi-Dirac: fermioni, particelle a spin semi-intero).*

Unico 2015:
Lanciando una moneta sei volte qual è la probabilità che si ottenga testa "al più" due volte? Qual è la probabilità che si ottenga testa "almeno" due volte? *(Prove ripetute a probabilità costante: distribuzione di Bernouilli).*

Unico 2015:
I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo? *(La probabilità è la scusa per calcolare un'area. Il problema inverso è calcolare un'area dal contorno complicato, che conduce a un integrale difficile, "giocando a dadi": metodi Montecarlo).*

Suppletivo 2015:
Vengono lanciati due dadi. Dei due punteggi, viene considerato il maggiore; se sono uguali, viene considerato il punteggio comune dei due dadi. Detto *X* il punteggio registrato, riportare in una tabella la distribuzione di probabilità di *X* e mostrare che $p(X=3)=5/36$.
Calcolare inoltre la media e la varianza di *X*.

Suppletivo 2015:
Una fabbrica produce mediamente il 3% di prodotti difettosi. Determinare la probabilità che in un campione di 100 prodotti ve ne siano 2 difettosi, usando:

- la distribuzione binomiale; • la distribuzione di Poisson.

Straordinario 2015:
Durante il picco massimo di un'epidemia di influenza il 15% della popolazione è a casa ammalato:

a) qual è la probabilità che in una classe di 20 alunni ce ne siano più di due assenti per l'influenza?

b) descrivere le operazioni da compiere per verificare che, se l'intera scuola ha 500 alunni, la probabilità che ce ne siano più di 50 influenzati è maggiore del 99% .
(Bernouilli: a) 1-P(0)-P(1)-P(2)~59,5%. b) Calcolo il n. medio m di ammalati nella scuola, la σ e poi P(50<X)=P(50<X<500)=P((50-m)/ σ <(X-m)/ σ <(500-m)/ σ), eccetera N(0;1. Sì, la probabilità è maggiore del 99%).

Straordinario 2015:
Determinare la funzione densità di probabilità di una variabile casuale continua che assume valori nell'intervallo [2, 5] con una distribuzione uniforme. Determinare inoltre il valore medio, la varianza, la deviazione standard di tale variabile e la probabilità che sia $7/3 \le x \le 17/4$. *(Area di un rettangolo).*

Straordinario 2015:

Calcolare il valore medio della funzione $f(x) = \begin{cases} x-1, in[1 \le x \le 3] \\ e^{x-3}+1, in]3 < x \le 6] \end{cases}$

Nell'intervallo [1; 6] e determinare il valore della x in cui la funzione assume il valore medio.
Cinese 2015:
Risolvere l'equazione $5\binom{n+1}{5} = 21\binom{n-1}{4}$.
Cinese 2015:
I lati di un triangolo misurano, rispettivamente, 6 cm, 6 cm e 5 cm. Preso a caso un punto *P* all'interno del triangolo, qual è la probabilità che *P* disti più di 2 cm da tutti e tre i vertici del triangolo? *(Già visto).*
Simulazione 25-3-2015:
Considera un punto P qualunque interno ad una sfera. Calcola la probabilità che la distanza di P dal centro della sfera sia minore rispetto alla distanza di P dalla superficie sferica. *V è $\propto R^3$).*
Simulazione 25-3-2015:
Da un mazzo di 40 carte estrai per 3 volte una carta a caso e ogni volta rimettila nel mazzo. Calcola qual è stata la probabilità di aver estratto una sola figura e qual è stata la probabilità di aver estratto almeno una figura.
Simulazione 22-4-2015:
Per progettare un sito web è necessario generare dei codici unici di accesso. Si vogliono utilizzare, a tale scopo, due lettere maiuscole dell'alfabeto inglese seguite da una serie di numeri compresi tra 0 e 9. Tutti i codici di accesso dovranno avere lo stesso numero di cifre ed è ammessa la ripetizione di lettere e numeri. Qual è il numero minimo di cifre da impostare in modo da riuscire a generare almeno 5 milioni di codici di accesso diversi? Giustificare la risposta.
Simulazione 22-4-2015:
In una stazione ferroviaria, fra le 8 e le 10 del mattino, arrivano in media ogni 20 minuti due treni.
Determinare la probabilità che in 20 minuti:
a) non arrivi alcun treno;
b) ne arrivi uno solo;
c) ne arrivino al massimo quattro. *(Poisson. E in 40miuti?).*
Simulazione 10-12-2015:
Lanciando una coppia di dadi cinque volte qual è la probabilità che si ottenga un punteggio totale maggiore di sette almeno due volte? *Bernouilli; p=6/36=1/, q=5/6 e poi…).*

Simulazione 10-12-2015:

Risolvere la seguente equazione: $6\binom{x}{5}=\binom{x+2}{5}$.

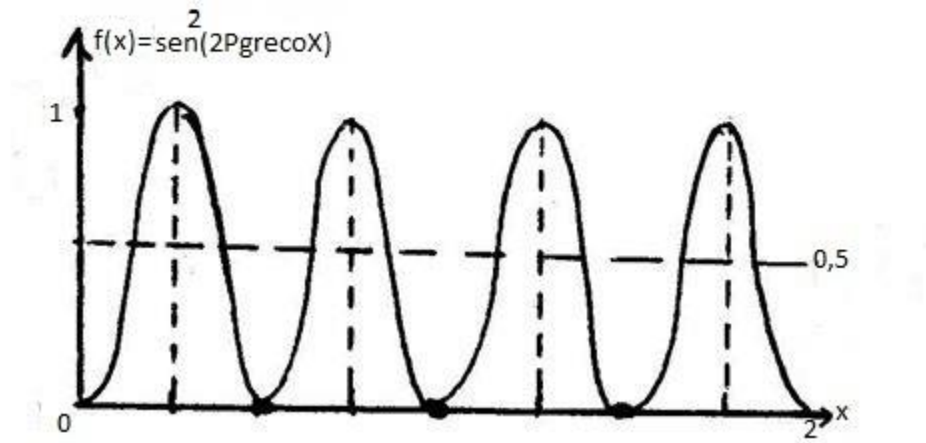
America 2014:
È possibile che nello sviluppo della potenza $(2a^2 -3b^3)^7$ compaia il monomio $ka^{10}b^6$? E il monomio ka^8b^8? (k numero reale). Nel caso affermativo si trovi il valore di k motivando esaurientemente la risposta.
America 2014:
Quanti colori si possono formare mediante le combinazioni dei sette colori fondamentali dello spettro? (contando, cioè, i colori presi separatamente e a 2 a 2, a 3 a 3, ..., a 7 a 7).
Estero Ordin 2014:
Lo sviluppo della potenza $(x^3+y^k)^{20}$ contiene il termine la cui parte letterale è: $x^{21}y^{26}$. Si trovi k.
Estero PNI 2014:
Un mazzo di "tarocchi" è costituito da 78 carte: 22 carte figurate, dette "Arcani maggiori", 14 carte di bastoni, 14 di coppe, 14 di spade e 14 di denari. Estraendo a caso da tale mazzo, l'una dopo l'altra con reinserimento, 4 carte, qual è la probabilità che almeno una di esse sia un "Arcano maggiore"?
Estero PNI 2014:
Nel poscritto al suo racconto *"Il Mistero di Marie Rogêt"*, Edgar Allan Poe sostiene che, "avendo un giocatore di dadi fatto doppio sei per due volte consecutive, vi è una ragione sufficiente per scommettere che gli stessi sei non usciranno ad un terzo tentativo". Ha ragione? Si motivi esaurientemente la risposta. *(Il caso non ha "memoria"; illustra con un esempio).*
Finlandia 18 marzo 2015:
Tra gli abitanti di Helsinki il numero [di quelli] di madrelingua straniera è cresciuto del 7,5% all'anno nel periodo 2003-2013. Nel 2013 è stato stimato che nel periodo 2013-2033 il numero in questione raddoppierò ancora, Calcola l'aumento percentuale medio annuo atteso del numero di madrelingua straniera in questi 30 anni. *(Area di rettangoli).*
Finlandia 18 marzo 2015:
Supponiamo che il quoziente intellettivo della popolazione segua la distribuzione normale $N(100,15)$ *[N(m, σ]*. Determina un intervallo, simmetrico intorno al valore atteso 100, al quale appartenga circa la metà della popolazione. *(Nota: 100 valore medio o valore atteso, 15 è lo scarto quadratico medio σ. Occorre consultare la tavola della distribuzione gaussiana standard)*.
Finlandia 18 marzo 2015:
Alla mostra canina Bau-luglio ci si può iscrivere per la mostra di sabato o per quella di domenica o per entrambe. Un dato anno alla mostra canina si sono inscritti 1372 cani, dei quali 31 solo alla mostra di sabato e 43 solo a quella di domenica.
Sia S l'evento "cane iscritto alla mostra di sabato" e D l'evento "cane iscritto alla mostra di domenica".
(a) Calcola la probabilità P(S e D).
(b) Come si definisce la dipendenza stocastica?
(c) Nell'anno in questione gli eventi S e D sono indipendenti?
(d) Siano in generale a i cani iscritti solo alla mostra del sabato, b quelli iscritti sabato e domenica e c quelli iscritti solo alla mostra di domenica. Qual' è la condizione sui numeri a, b, c affinché gli eventi S e D siano stocasticamente indipendenti?

I quesiti seguenti sono stati aggiunti da me.
1°. Perché non può esistere una funzione densità costante su tutto l'asse reale?

2°. Sia data la funzione $f(x)=\begin{cases}0, per x\le -1\\ k, per -1<x\le 1\\ 0, per 1<x\end{cases}$. Determinare k in modo che f(x) sia una funzione densità. Calcolare il valor medio M(x) di x e lo scarto quadratico medio σ. Calcolare la probabilità che |x-M(x)|< σ. Se c e c+h sono interni all'intervllo [-1; 1], la probabilità che x sia interno all'intervallo [c; c+h] dipene da c? Dipende da h? Quanto vale?

(Risposte: k=1/2. M(x)=0, ovvio. $M(x^2)=1/3$, Var(X)=1/3, σ=1/√3=0,577. P(|x-M(x)|< σ)=0,577= $\int_{0-\sigma}^{0+\sigma} f(x)dx$. *P dipende da h, ma non da c; P=h/2).*

3°. Sia $f(x)=A.Sen^2(2\pi x)$ per x∈ [0; 2], f(x)=0 altrove. (a) Determinare A affinchè f(x) sia una funzione densità. (b) Calcolare il valor medio di x. (c) Calcolare la probabilità che x sia compresa tra 0 e ½ e poi tra 1 e 5/4. *(a): A=1; (b): M(x)=1; (c) 25% e 12,5% senza calcoli!).*
La f(x) potrebbe essere la densità di probabilità di una particella quantistica vincolata a un stare su un segmento di lunghezza 2, con numeo quantico totale n=4.[1] *La densità costante 0,5 rappresenta la densità di probabilità di una particella classica vincolata allo stesso segmento, a cui tende la probabilità quantistica per numero quantico totale elevato: energia elevata. Vedi disegno sottostante).*



APPENDICE

Triangolo di Tartaglia: (Vedi quesiti 2001, Ordinamento)

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

$$\frac{n}{(n-k)!}=\frac{1.k}{(n-k)!}+\frac{1}{(n-k-1)!}$$

$$n=k+(n-k),(\text{q.e}.d.)$$

(n>k)

Niccolò Fontana, detto *Tartaglia*
(Brescia, 1499 circa – Venezia, 13 dicembre 1557)

[1] Vedi, per esempio, "*Teoria dei quanti*" sul mio sito *digilander.libero.it/ottavioserra0*, cartella Articoli, sottocartella Annuario del Liceo scientifico Scorza di Cosenza.

Equazione:(Vedi quesiti 2007, Ordinamnto)

$$4\binom{n}{4}=15\binom{n-2}{3};(n>4).$$

$$4\frac{n!}{4!(n-4)!}=15\frac{(n-2)!}{3!(n-5)!}\Rightarrow 4\frac{n(n-1)}{24(n-4)!}=15\frac{1}{6(n-5)!}$$

$$\frac{1}{6}n(n-1)=15\frac{n-4}{6}\Rightarrow n^2-n=15n-60$$

$$n^2-16n+60=0\Rightarrow n=8\pm\sqrt{64-60}=\begin{cases}8-2\\8+2\end{cases}=\begin{cases}6(SI)\\10(SI)\end{cases}$$

(n

Identità: (Vedi quesiti 2009, Ordinamento)

$$\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}.\frac{n-k}{k+1};Infatti$$

$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.\frac{n-k}{k+1}\Rightarrow$$

(n>k)

$$\frac{(n-k)}{k+1}=\frac{n-k}{k+1}(\text{q.e.d.})$$

Alcune formule suggerite dal quesito

[2004, ORD e PNI] "*Considerate gli insiemi A = {1,2,3,4} e B = {a, b, c}; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?* " *(81).* **N° [Funzioni di A(a) → B(b)]= b^a. Dimostra.**

1) N° [Funzioni *iniettive* di A(a) → B(b)]=

$$\binom{b}{a}a!$$

, (a≤b). Dimostra.

2) N° [Funzioni *suriettive* di A(a) → B(b)=

$$\sum_{k=0}^{b-1}(-1)^k\binom{b}{k}(b-k)^a$$

, (a≥b). La dimostrazione, piuttosto difficile, si può trovare nel mio articolo "*Le mappe e le loro proprietà fondamentali*", sulla rivista "*Scuola Viva*", N° 3, dicembre 1967, UTET, Torino.

PROBLEMA su una funzione "densità".

Sia f(x)=1/3 per x in]0; 2], f(x)=k per x in]2;4], f(x)=0 fuori dell'intervallo]0;4]:

$$f(x)=\begin{cases} 0; x \le 0 \\ \dfrac{1}{3}; 0 < x \le 2 \\ k; 2 < x \le 4 \\ 0; 4 < x. \end{cases}$$

1) Determinare k in modo che f(x) sia una funzione densità (Risposta: k=1/6).

2) Calcolare valore medio M(x) e varianza σ^2 di x ($M(x)=5/3$, $\sigma^2=M(x^2)-[M(x)]^2=4-(5/3)^2=11/9=1,222$…; $\sigma=1,1$).

3) Calcolare la probabilità che $|x-5/3|<1,1$ (cioè $P(|x-M(x)|<\sigma)$. Risulta P=61%.

(Non occorre usare la tavola della distribuzione gaussiana standard! Basta l'area del rettangolo).

QUESITO PNI 2005 "*Se il 40% della popolazione ha più di 60 anni, può l'età media della popolazione esse di 30 anni?*

Sia U l'età media degli ultrasessantenni, G quella dei "giovani", E della popolazione.

*E=U*0,4+G*0,6>60*0,4+G*0,6 → G*0,6<E-60*0,4, cioè G*0,6<30-24 → G<10 anni.*

Ciò è poco credibile! Chi lavora per pagare pensioni e stipendi?

PNI 2009. Ad una festa l'età media degli uomini è 26 anni, delle Donne è 19 anni, quella complessiva è di 22 anni. Trovare il rapporto Uomini/Donne.

T=U+D.

EMt=22=Somma(Et)/(U+D), EMu=26=Somma(Eu)/U, EMd=19=Somma(Et)/D.

Somma(Et)=Somma(Eu)+Somma(Ed)→ **22(U+D)=26U+19D→**

4U=3D→ **U/D=3/4. (Tre uomini ogni quattro donne).**