Ottavio Serra

Distribuzioni di probabilità

1) **Distribuzione binomiale o di Bernouilli:** $P(n,k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, q=1-p.

   Per n "grande" possiamo introdurre una funzione densità, perché il calcolo dei coefficienti binomiali è disagevole.

2) Funzione densità normale di Gauss: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, m=E(X), σ^2=Var(X).

3) Funzione di ripartizione normale (Probabilità che la variabile aleatoria X abbia valore $\le x$).

   $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{-(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt=P(-\infty<X\le x)$.

4) Funzione di ripartizione normale standard: ponendo (t-m)/σ = z, risulterà

   $F(\mathrm{y})=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y}e^{\frac{-z^2}{2}}dz=P(-\infty<\dfrac{X-m}{\sigma}\le y)$. Si è posto y=(x-m)/σ.

   Ciò significa che si misura lo scarto in termini di (x-m)/σ.
   N.B. Dato che la densità (curva a campana) è una funzione pari, si tabula F(y) solo per valori positivi di y, perché F(-a)=1-F(a); perciò $P(-a<\dfrac{X-m}{\sigma}\le a)=2F(\mathrm{a})-1$.

5) Distribuzione di Poisson: $P_k(\lambda,\Delta t)=\dfrac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}e^{-\lambda\Delta t}$, probabilità di osservare k processi nell'intervallo di tempo $\Delta t=(t_0+\Delta t)-t_0$ (indipendente da t_0: processi stazionari). Il parametro λ è il valore medio di k nell'unità di tempo (per Δt=1), come si può dimostrare formalmente: $\bar{k}=\sum_{k=0}^{\infty}k\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda.$

   Anche la varianza di k nell'unità di tempo è λ.
   Se infatti Δt=1, λ si può considerare il numero medio di particelle in una cella, avendo n particelle (batteri) e g celle (gocce della coltura batterica): valor medio di particelle per cella: λ=n/g, per g (ed n) tendenti all'infinito, ma a determinato. Allora la probabilità per una particella di stare in una data cella è 1/g, infinitesima per g → ∞ (**eventi rari**). Anche la varianza risulterà uguale a λ; infatti
   σ^2 = n.p.q=n.p.(1-p)=n.1/g.(1-1/g)=λ(1-1/g)=λ (per g tendente all'infinito).
   Per dimostrare la legge di Poisson, con Δt=1, si parte dalla distribuzione binomiale di Bernouilli $P(n,k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k!}\left(\dfrac{1}{g}\right)^k\left(1-\dfrac{1}{g}\right)^{n-k}$ e quindi

   $$P(n,k)=\frac{1}{k!}\frac{n}{g}\left(\frac{n}{g}-\frac{1}{g}\right)...\left(\frac{n}{g}-\frac{k-1}{g}\right)\left(1-\frac{1}{g}\right)^{g\lambda}\left(1-\frac{1}{g}\right)^{-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

   $\left(\dfrac{n}{g}=\lambda,\dfrac{1}{g}\to 0, per g\to\infty\right)$.

Nota: Si badi che, nel caso non compaia Δt ($\Delta t=1$), ma si conosca la probabilità p di un evento e la grandezza n del campione, il valor medio λ è dato da np. Si vedano, per chiarire, l'esercizio 3 e i successivi.

Esercizio 1. Su un tratto secondario di strada transitano in media due auto ogni 20 minuti. Calcola la probabilità che in un intervallo di 20 minuti transitino

a) Zero auto
b) Una sola auto
c) Due auto
d) Tre auto
e) Almeno tre auto.

Stesse domande se il periodo di osservazione è di un'ora (Siccome l'unità di tempo è 20 minuti, 1 ora= 3 unità di tempo).

Esercizio 2. Calcolare la probabilità a) dell'esercizio 1 utilizzando direttamente la distribuzione binomiale di Bernouilli. Dovete scegliere un n e un g (non troppo grandi) tali che $np=n/g=\lambda$, poi provare con n e g più grandi (ma sempre tali che $n/g=\lambda$) e vedere se si nota la tendenza verso il valore calcolato con la legge di Poisson.

Esercizio 3. Una fabbrica di un certo tipo di oggetti produce in media il 3% di pezzi difettosi. Si calcoli la probabilità di trovare due pezzi difettosi in un campione di 100 pezzi,

a) Con la legge di Poisson;

b) Con la legge di Bernouilli.

Esercizio 4. Si ripeta l'esercizio 3, ma una volta per un campione di 50 pezzi, un'altra per un campione di 200 pezzi. Confrontando i risultati ottenuti con la legge di Poisson e con la legge di Bernouilli, che cosa si nota?

Esercizio 5. Supponiamo adesso che la probabilità che la fabbrica produca un pezzo difettoso è molto piccola, $p=10^{-4}$. Su un campione di $n=10^5$ pezzi il valore medio dei pezzi difettosi risulta essere $\lambda=np=10$. Calcolare la probabilità che in quel campione il numero dei pezzi difettosi sia minore di 6. Qualcuno sarebb capace di risolvere questo esercizio con la formula "*esatta*" di Bernouilli?

BIBLIOGRAFIA

Giovanni Prodi: "Metodi matematici e statistici, McGraw-Hill, Milano 1992;
Ottavio Serra: "Probabilità nel continuo e statistica inferenziale", ***Lezioni allo Scorza*** **in "*10 in matematica*", anno 2010, nel sito digilander.libero.it/ottavioserra0.**