Ottavio Serra

Il tacchino di Russell e altre storie induttive.
(*Induzione empirica e induzione numerabile*)

1° Il caso della spia sfortunata[i].

La spia straniera venuta in Italia per carpire importanti segreti industriali di una grande industria, cerca di capire la chiave della **R**isposta alla **D**omanda che il vigilante pone ai visitatori:
D:12, R:6; **D**:8, **R**:4; **D**:10, R:5; **D**:6, **R**:3. **Ho capito! Ora ci provo**: **D**:4, **R**:2 **(ALLARME!).**

2° Il tacchino di Russell[ii].

La contadina (americana) porta il mangime al tacchino all'alba di ogni giorno, immancabilmente, col sole o con la pioggia.

Il tacchino, *a pancia piena, sente il bisogno di filosofare* (Aristotele). Dopo molti riscontri, conclude che debba valere la seguente legge di natura:

"*E' legge universale che la contadina mi porti il mangime all'alba, con la stessa certezza con cui il giorno segue alla notte*". **Ma la legge fu smentita tragicamente il giorno del ringraziamento.**

3° La congettura di Pierino[iii].

Secondo lo studente Pierino in una funzione il **massimo è a sinistra e il minimo a destra**.

$F(x)=x^3-3x^2$ (**Vero**); $F(x)=x^5-20x$ (**Vero**); $F(x)=\dfrac{x+1}{x-x^2}$ (**Vero**); $F(x)=\dfrac{x+1}{x^2-x}$ (**Ah, ah!**);

per non dire di $F(x)=1/x^2$, volendo limitarci a qualche funzione del 3° ordine (**Uh, Uh!**).

4° L'infinità dei numeri primi e il caso del professore sfortunato.

Che i numeri primi siano infinti lo dimostrò per primo Euclide, con un ragionamento semplice ed elegante (*Elementi, libro IX, proposizione 20*). Ma il nostro professore, forse fuorviato da Keith Devlin[1], ragiona così: Supponiamo che i numeri primi siano soltanto n e siano, in ordine crescente, $p_1=2$, $p_2=3$, …, p_n. Posto $x=p_1p_2\dots p_n$, $y=x+1$, risulta $y>p_n$. Se y è primo, ho trovato un numero primo maggiore di tutti i precedenti, contro l'ipotesi che p_n sia il massimo primo.

(Fin qui il ragionamento fila; è, più o meno, quello di Euclide!). Se però y non fosse primo, sarebbe divisibile per qualche numero primo q, che, per l'ipotesi fatta, dovrebbe essere uno di quelli ipotizzati: p_1 o p_2 o … p_n. Ma allora q dividerebbe y e x e quindi dividerebbe anche la loro differenza che è 1. Ciò è impossibile (un numero primo è maggiore di 1). *(Fin qui va bene).*

Ne segue che y è primo (Ohibò!). Il professore, trionfante, sottopone a verifica induttiva (da tronfio tacchino) il suo tronfio (e sbagliato) ragionamento; a proposito, dov'è sbagliato? Egli prova:

[1] Keith Devlin, "I problemi del millennio", Longanesi, 2004. Devlin riporta malamente e in modo errato il bel ragionamento di Euclide (pag. 76 e 77, Edizione speciale del 2009, su licenza Longanesi, per "Le Scienze") e il nostro professore lo copia integralmente, comprese le virgole, senza controllo critico. *Ipse (Devlin) dixit.*

2+1=3 (Primo!); 2.3+1=7 (Primo!); 2.3.5+1=31 (Primo!); 2.3.5.7+1=211 (Primo!). Ammesso che così continuando si ottengano sempre numeri primi, ciò non toglie che il ragionamento del professore sia sbagliato. **Ma è sicuro che tutti i numeri del tipo y siano primi?**

5° Gauss bambino calcola al volo che 1+2+… 1000=500500. Come fece?

Intuire l'idea del piccolo Gauss per dimostrare il risultato precedente e generalizzarla per provare che **$1+2+\ldots+n=n(n+1)/2$. Dimostrare poi questa formula per induzione numerabile** (Vedi più avanti).

Usando l'induzione empirica (*il metodo del tacchino*) controllare le formule seguenti:

a) $1^2+2^2+\ldots+n^2=3n^3/4-3n^2/4+n$.

b) $1^2+2^2+\ldots+n^2=n^3/3+n^2/2+n/6$.

c) $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

In quali dei tre casi il metodo del tacchino risulta risolutivo?
Nei casi rimasti indecisi usare l'induzione numerabile di Peano.

Il principio di induzione empirica (del tacchino) dice: "Se una legge (una proprietà) è stata verificata in un certo numero di casi, è probabile che sia vera in generale e la probabilità tende alla certezza man mano che cresce il numero delle conferme". **E' il fondamento del metodo sperimentale inaugurato da Galilei.** *Però va usato con cautela!*.

Il principio di induzione numerabile (di Peano[2]) dice: "Se una proprietà è vera per n=k, dove k=0, 1, 2…, e se, essendo vera per n, è vera per n+1, allora è vera per tutti i numeri naturali $n\geq k$.

In simboli: $\{P(k)\cap[P(n)\Rightarrow \mathrm{P(n+1)}]\}\Rightarrow[\forall\, \mathrm{n}\geq \mathrm{k}, \mathrm{P(n)}]$.

Il principio di Peano consente di verificare se una formula è **giusta** o **sbagliata**, ma come si fa a **trovarla**? *Questa è un'altra storia.*

Giuseppe Peano

---

[2] Giuseppe Peano, grande matematico e logico italiano (Spinetta di Cuneo, 1858 – Torino, 1932). Il suo capolavoro è il "*Formulario mathematico*", al quale si ispirarono Russell e Whitehead per la stesura dei "Principia mathematica".
Nel 1902 pubblicò "Aritmetica generale" in cui formalizzò la teoria dei numeri naturali, introducendo i famosi *5 assiomi di Peano*. Il 5° assioma è il principio di induzione numerabile.

Numeri primi di Fermat. I numeri di Fermat sono numeri (naturali) del tipo $F_n = 2^{2^n} + 1$.
Fermat credeva che tutti i numeri di tale forma fossero primi. Questo è vero per i primi cinque:

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$

$$F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$

$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$

$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$

$$F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65\,537$$

Ma nel 1732 Eulero dimostrò che Fermat si sbagliava, dando la fattorizzazione di F_5:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

(Fermat non era un tacchino!). Non si conoscono numeri primi di Fermat oltre F_4.

Curiosità. Nel sistema binario tutti i numeri di Fermat sono palindromi . (**Dimostrarlo**). Verifiche: (3=11; 5=101; 17=10001; 65537=10000000000000001).
4294967297=100000000000000000000000000000001 (**mio programma in Pascal "*Basenum*"**).
NOTA. I numeri di Fermat compaiono nel teorema di Gauss sulla costruibilità con riga e compasso dei poligoni regolari: **Un poligono regolare è costruibile con riga e compasso se il numero dei suoi lati è $2^n.p_1.p_2. \dots .p_r$, con $n \geq 0$, $r \geq 0$ e $p_1, \dots p_r$ numero primi distinti del tipo di Fermat.**

Se è vero che i numeri di Fermat sono solo 5, i poligoni regolari con un numero dispari di lati, costruibili con riga e compasso, sono in numero finito: **quanti sono?**

---

[i] Questa storiella mi è stata raccontata, molti anni fa, da Francesco Speranza, docente di analisi matematica all'università di Parma.

[ii] Storiella inventata da Bertrand Russell per prendere in giro le tecniche investigative alla Sherlock Holmes (e i filosofi positivisti).

[iii] Storia vera. Pierino (non è il suo vero nome) fu mio alunno nei primi anni del mio insegnamento al Liceo scientifico "Scorza" di Cosenza. Ma la colpa della sua risposta errata fu anche mia, che non avevo fatto abbastanza esempi opportunamente variati prima di interrogarlo.