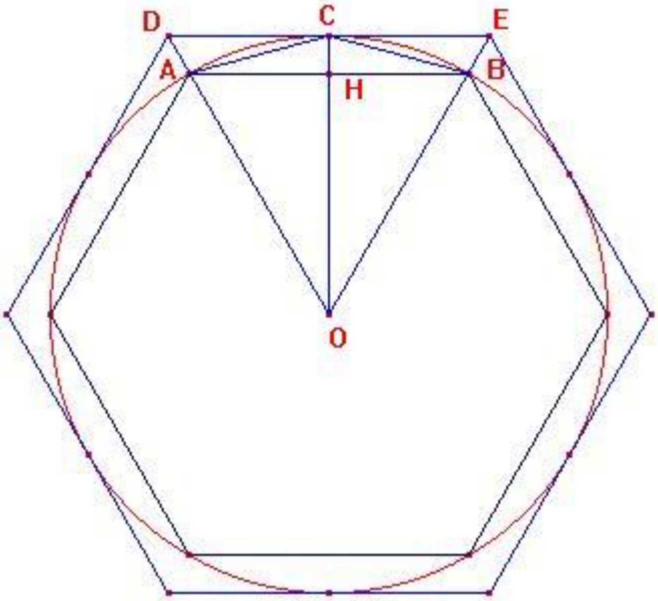
Ottavio Serra

Calcolo di π col metodo di Archimede.

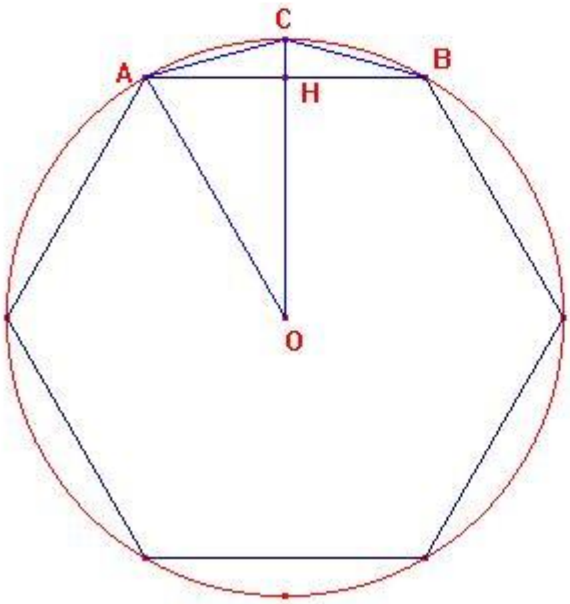
Archimede calcola π come elemento separatore della classe dei semiperimetri di poligoni regolari inscrirri e di quelli circoscritti, di uguale numero di lati, in un cerchio di raggio 1.
Egli parte dall'esagono regolare perchè $x = l_6 = r = 1$. Si tratta di calcolare ora $y = L_6$, lato dell'esagono regolare circoscritto. Poi si passerà ad l_{12} e L_{12} eccetera.
In generale, si tratta di passare da $x=l_n$ ad $y=L_n$ e da l_n a l_{2n}.



Posto $l_n = x = AB$, si deve trovare $y = L_n = DE$. Risulta DE:AB=OC:OH→ y:x=1:OH

→ $y=x/OH = x/\sqrt{1-(x/2)^2} = \dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$.

Si tratta ora di passare da $AB=x=l_n$ ad $AC=l_{2n}$.



Sia $AB=l_n$, allora $AC=l_{2n}$. Risulta $AC^2=AH^2+HC^2=(x/2)^2+(1-OH)^2$, con $OH=\sqrt{1-(x/2)^2}$, onde

$$l_{2n} = AC = \sqrt{\frac{x^2}{4}+\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2}{4}+1+1-\frac{x^2}{4}-2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}\ .$$

Il calcolo procede così: n:=6; x:=1;   **Ripeti**

$x := \sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}$ (lato del dodecagono); $\pi_{Difetto}$=n.x; (Semiperimetro dell'n-gono inscritto);

$y := \dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$; $\pi_{Eccesso}$ =n.y;(semiperimetro dell'n-gono circoscritto); n:=2.n

(ci prepariamo a passare da 12 a 24 lati e in generale da n a 2n lati)

Finchè $\pi_{Eccesso} - \pi_{Difetto} < \varepsilon$ (assegnato).

Il punto delicato è il passaggio da l_n ad l_{2n}. Se n è *grande* , x=l_n è *piccolo* ed l_{2n} è la radice quadrata di due numeri *quasi uguali* (entrambi a 2); si rischia un errore di *cancellazione* e il ciclo di calcolo diventa *instabile*. Per stabilizzare il calcolo, occorre una semplice manipolazione algebrica:

$$l_{2n} = AC = \sqrt{2-\sqrt{4-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}} .$$

Ora non c'è rischio di cancellazione, perché, per x piccolo, il denominatore è quasi 2 ed l_{2n} è circa la metà di x (=l_n), come suggerisce anch l'intuizione geometrica.