Ottavio serra
Questionari del 2008. (29-4-2009)

Ordinamento 2008.

1. Si consideri la seguente proposizione: " Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $sen\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
3. Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?
4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2008}}{2^x}=0$
5. Si determini un polinomio *P(x)* di terzo grado tale che:
$$P(0)=P'(0)=0,\ P(1)=0\ \text{ e } \int_0^1 P(x)dx=\frac{1}{12}$$
6. Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n>3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?
7. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3-3x^2+k=0.$$
8. Sia f la funzione definita da $f(x)=\pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x=\pi$.
9. Sia $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$; esiste $\lim_{x\to1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.
10. Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (fig. a lato) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?

PNI 2008.

1. Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.
2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $sen\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
3. Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.
4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2008}}{2^x}=0$
5. Nel piano riferito a coordinate cartesiane (x, y) si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta: $y^2-x^3>0$
6. I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.
7. Perché è *geometria "non" euclidea*? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.

8. Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.

9. In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?

10. Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y = e^{-2x}$? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

Avvio alla soluzione.

Ordinamento

1. E' **falso.** Infatti una piramide e un prisma di uguale volume abbiano uguale altezza , (ma basi nel rapporto di 3 ad 1); essi si possono disporre come nell'enunciato, ma chiaramente le sezioni corrispondenti non sono equivalenti. L'enunciato è l'inverso del principio di Cavalieri, che invece è vero.

2. E' il solito lato del decagono regolare.

3. E' un po' più semplice del barattolo di birra, già incontrato. Questa volta si trova che h=r.

4. Se per x→c f(x) e g(x)= sono entambe infinitesime (zero) o entrambe infinite, allora $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Se anche il rapporto delle derivate è indeterminato, si itera la formula. La dimostrazione si basa sul teorema di Cauchy. Nell'esempio proposto la regola andrebbe applicata 2008 volte ottenendo alla fine $\lim_{x\to+\infty}\frac{2008!}{(\log 2)^{2008}.2^x} = 0$, ma non ce n'è bisogno: a ogni passo il grado del numeratore diminuisce, mentre la funzione espomziale a denominatore resta invariata, salvo un fattore moltiplicativo.

5. Sia Px)=ax3+bx^2+cx+d. Le prime tre condizioni forniscono d=c=0, b=-a. L'integrale = –a/12 e quindi a= -1. Perciò P(x)= -x^3+x^2.

6. n(n-1)/2 = n+d, n(n-1)(n-2)/6 = n+2d, dal sistema si ricava n=2, non accettabile (perché?) ed n=7.

7. Il problema equivale a trovare le intersezioni di y=3x^2 –x^3 col fascio di rette x=k. Siccome la cubica va da +∞ a –∞ e lo zero x=0 è doppio, si vede che per x=0 essa ha un minimo relativo (0,0), poi ridiventa positiva fino a 3 e infine definitamente negativa, perciò deve avere un massimo relativo tra 0 e 3. Con le derivate si trova che tale massimo è (2, 4). Perciò l'equazione proposta ha tre soluzioni per k compresa tra 0 e 4, una fuori di questo intervallo.

8. Il dominio è dato da x>0 perché… La f '(x) = $\pi^x \log \pi - \pi . x^{\pi-1}$, f ''(x) = $\pi^x \log^2 \pi - \pi(\pi-1).x^{\pi-2}$.
Si ha f '(π) = $\pi^\pi(\log \pi - 1)>0$ perché $\pi>e$. F ''(π) = $\pi^{\pi-1}(\pi\log^2 \pi - \pi + 1) > 0$.

9. f(x) = (x-1)(x+1)/|x-1|. Se x>1, f(x)=x+1; se x<1 f(x)= -(x+1), perciò limite destro=2, limite sinistro= -2.

10. La pendenza è la tangente trigonometrica m dell' angolo α della strada con l'orizzontale. Nell'esempio sen(α) = 85/1200=0,0708 → α =(4,1)°, m=tang(α)= 0,071 e la pendenza è del 7%.

PNI.

1. La probabilità P=1-Q, dove Q è la probabilità che il punto sia interno alla sfera. Posto 1 il raggio della sfera inscritta, il volume della sfera è $V_s = 4\pi/3$, del cono è $V_c = 3\pi$. Q=4/9 e P=5/9.

2. Il solito decagono regolare.

3. detta x la distanza dal centro O del cerchio, (x tra 0 e 1), la sezione ha lato l=$2\sqrt{1-x^2}$, l'area è S=$\frac{l^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(1-x^2)$ e il volume è $V = \sqrt{3}\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = 2\sqrt{3}(1-\frac{1}{3}) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Sapreste trovare V senza calcolo integrale?.

4. come il 4 di ordinamento.

5. Punti per cui $y^2>x^3$. Tutti i punti del semipiano $x\leq 0$, escluso (0,0); se $x>0$, tutti i punti al disopra del grafico di $y=\sqrt{x^3}$ e al di sotto del grafico di $y=-\sqrt{x^3}$.

6. Si immagini che gli spigoli siano sugli assi cartesiani e il vertice in cui concorrono sia l'origine O(0,0,0). Allora i tre spigoli sono tre vettori **a**(8,0,0), **b**(0,9,0), **c**(0,0,12) e la diagonale **d**(8,9,12).

$$\cos\alpha = \frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{8.8}{8.\sqrt{64+81+144}} = \frac{8}{\sqrt{289}} = \frac{8}{17},\ \cos\beta = \frac{9}{17},\ \cos\gamma = \frac{12}{17}.$$

α=(61,93)°=61°56', β=(58,03)°=58°2', γ=(45,1)°=45°6'.

7. Che cosa sapete di geometrie non euclidee?

8. Vedi sopra l'8 di ordinamento.

9. Sono 12 M e 8 F. prob. P che in un gruppo di 8 ci siano 4 F. Lo spazio di probabilità ha misura $m(\Omega)=\binom{20}{8}$, l'evento E (4 F e 4 M) ha misura $m(E)=\binom{8}{4}.\binom{12}{4}$ → P= $\dfrac{\binom{8}{4}\binom{12}{4}}{\binom{20}{8}} =$

$$\frac{8.7.6.5}{2.3.4}\frac{12.11.10.9}{2.3.4} : \frac{20.19.18.17.16.15.14.13}{2.3.4.5.6.7.8} = \frac{11.3.7.5}{19.17.13} = \frac{1155}{4199} \approx 0,275 .$$

10. La simmetrica di $y=e^{-2x}$ rispetto all'origine è $-y=e^{2x}$ cioè $y= -e^{2x}$; la simmetrica rispetto alla retta $y=x$ è $x=e^{-2y}$, cioè $y=-(1/2)\log x$.