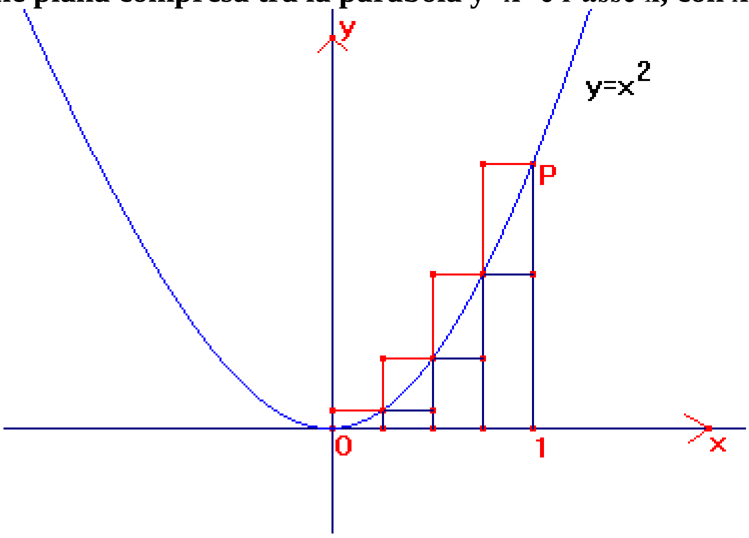
Ottavio Serra

Area del segmento parabolico, volume del cono, volume e area della sfera.

Problemi

1) Area della regione piana compresa tra la parabola $y=x^2$ e l'asse x, con x tra 0 e 1.



Se si divide l'intervallo [0 , 1] in 4 parti uguali, il valore per difetto dell'area è
$S_1 = ¼.[0^2+(1/4)^2+(2/4)^2+(3/4)^2] =1/4.[(1+4+9)/16] = 14/64 = 7/32 = \approx 0,22$.
(Ho sommato le aree dei 4 rettangoli al di sotto della parabola; notare che il primo ha altezza 0).
Se invece sommo i 4 rettangoli (con lato superiore al di sopra della parabola), ottengo l'area per eccesso: $S_2 = ¼.[(1/4)^2+(2/4)^2+(3/4)^2+(4/4)^2] = ¼.[(1+4+9+16)/16] = 30/64 = 15/32 = \approx 0,47$.
L'errore è molto grande; se però dividiamo [0 , 1] in n parti avremo.
$S_1 = (1/n).[(0)^2+(1/n)^2+(2/n)^2+\ldots +((n-1)/n)^2] = (0^2+1^2+2^2+\ldots (n-1)^2)/n^3$ e ricordando un risultato acquisito:

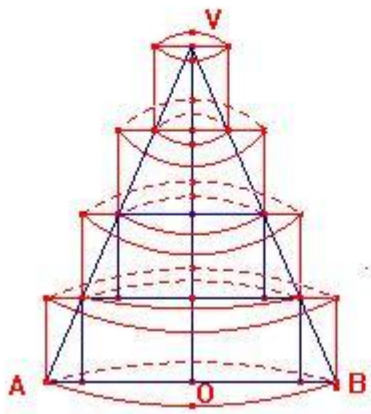
$$S_1 = (1/n^3).[(n-1).n.(2n-1)/6] = (2n^3-3n^2+n)/(6n^3) = 1/3- 1/2n+1/6n^2.$$

Analogamente, $S_2 = (1/n).[(1/n)^2+/2/n)^2+\ldots (n/n)^2] = (1^2+2^2+\ldots+n^2)/n^3$ per cui
$S_2 = [n(n+1)(2n+1)]/6n^3 = 1/3+1/2n+1/6n^2$. La differenza $S_2 – S_1 = E$ rappresenta l'errore massimo commesso. Nel nostro caso, E = 1/n. Ciò significa che per avere un risultato con un errore < 10^{-3} occorre dividere l'intervallo base [0,1] almeno in 1000 parti. Il metodo è poco efficiente e va sostituito con metodi di più rapida convergenza, per esempio sostituire i *rettangoli* con *trapezi* inscritti e circoscritti. In questo caso però siamo fortunati: se n diventa arbitrariamente grande (diverge a ∞) 1/2n e $1/6n^2$ convergono a zero e lim S_2 = Lim S_1 = 1/3: l'area compresa tra l'arco di parabola e l'asse x nell'intervallo [0,1] è esattamente 1/3.
Archimede, per altra via, aveva trovato che l'area del *segmento parabolico* compreso tra la parabola e una parallela alla tangente nel vertice è i 2/3 dell'area del rettangolo circoscritto. Nel nostro caso il rettangolo ha base 2 (x da -1 ad 1) e altezza 1, l'area del rettangolo è 2 e l'area del segmento parabolico è (2/3).2 = 4/3, d'accordo col nostro risultato. 2- 2(1/3) = 2-2/3 = 4/3.
Dopo Newton e Leibniz non c'è più bisogno di ricercare un metodo particolare caso per caso, si usa il calcolo integrale. Ma non ogni funzione si sa integrare, in questi casi occorre affidarsi ad approssimazioni numeriche (metodi dei trapezi o più raffinati ancora), usando al computer software proprio o realizzato da esperti. (Derive, Matlab, Mathematica…).

2 Volume del cono (o di una piramide).

Premetto il principio di Cavalieri: "*se due solidi si possono disporre in modo che un fascio di piani paralleli sechi su di essi coppie di regioni (piane) equivalenti (di area uguale), allora i due solidi sono equivalenti (hanno uguale volume)*". Siccome un parallelepipedo (retto rettangolo) e un prisma (o un cilindro) di uguale altezza e basi equivalenti soddisfano il principio di Cavalieri, essi sono equivalenti e siccome il volume del parallelepipedo è dato dal prodotto delle tre dimensioni, che si

può interpretare com area di base per altezza, il volume del prisma è area di base per altezza. Per il cilindro segue $V = \pi r^2 h$, se r è il raggio di base ed h l'altezza.
Passiamo ora al cono (stesso discorso per la piramide). Sia dato un cono di altezza VO = h e raggio di base (circolare) OA = OB = r. Vedi figura.



Divisa l'altezza in n parti uguali (4 nella figura), si considerino i cilindri inscritti e quelli circoscritti, in numero di n. Ciascuno di essi ha altezza h/n e basi proporzionali ai quadrati delle distanze dal vertice V. Detta S_b la base del cono, le aree dei dischi sezione, a cominciare dal vertice, sono:
$S_0 = 0$, $S_1= S_b(1/n)^2$, $S_2 = S_b(2/n)^2$, $S_3 = S_b(3/n)^2$, … $S_{n-1} = S_b((n-1)/n)^2$, $S_n = S_b$.
Perciò il volume del cono per difetto è $V_1 = (h/n).[S_0+ S_1+ S_2+\ldots+ S_{n-1}]$, per eccesso è
$V_2 = (h/n).[S_1+ S_2+\ldots+ S_{n-1}+S_n]$ e dunque
$V_1 = (h/n^3)S_b[0^2+1^2+2^2+\ldots (n-1)^2] =hS_b[(n-1).n.(2n-1)]/(6n^3) = hS_b[2n^3-3n^2+n]/(6n^3) =$
$V_1 = hS_b[1/3-1/2n+1/6n^2$, Analogamenteil volume per eccesso è $V_2 = (h/n^3)S_b[1^2+\ldots+n^2]$, da cui
$V_2 = hS_b[1/3+1/2n+1/6n^2]$. Per $n\to\infty$ V_1 e V_2 tendono al valore *esatto* $V= hS_b/3$.
Questo risultato, per la piramide risale a un'intuizione di Democrito. Eudosso, come riferisce Archimede, lo dimostrò col metodo di *esaustione,* ora si può ricavare col calcolo integrale in poche battute. Per il cono, siccome l'area del disco circolare di base è πr^2 , $\mathbf{V_{cono} = \pi r^2 h/3.}$

3. Volume sfera. Affettiamo una semisfera di raggio r con piani paralleli al piano equatoriale, se i piani sono n, la distanza tra di essi è r/n e il raggio della k^ma^ sezione è $r_k = \sqrt{r^2 - (kr/n)^2}$. La semisfera si riempie di n cilindri, di cui il k^mo^ ha volume $V_k = \frac{r}{n}\pi(r^2 - \frac{k^2 r^2}{n^2})$, perciò il voluma della semisfera è approssimato per difetto da $V_1 = \pi r^3 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3} = \pi r^3 (1 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3})$, da cui
$V_1 = \pi r^3 (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2})$. Analogamente $V_2 = \pi r^3 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3} = \pi r^3 (1 - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3})$, da cui
$V_2 = \pi r^3 (1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2})$. Per $n\to\infty$, V_1 e V_2 tendono a $(2/3)\pi r^3$ e perciò il volume della sfera è

$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

Il volumr della sfera fu trovato per la prima volta da Archimede (con altro metodo); Galilei lo calcolò col principio di Cavalieri (suo discepolo), dimostrando che la semisfera è equivalente a una *scodella*, differenza tra il cilindro circoscritto e il cono inscritto nella semisfera. (Provate).

4. Aree. Calcolare l'area laterale del cilindro e del cono è facile. Per l'area della superficie sferica, si immagini la sfera riempita di un numero enorme n di piramidi col vertice nel centro e le basi sulla superficie della sfera. Il volume della sfera è approssimato da nS_b .r/3 e, per $n\to\infty$, $nS_b \to S_{sfera}$ e inoltre S_{sfera} .r/3 → al volume (4/3) πr^3, per cui infine $\mathbf{S_{sfera} = 4\pi r^2.}$

OSSERVAZIONE. Una porzione del piano cartesiano ha un significato (interpretazione) che dipende dal significato degli assi. Se si riporta in ascissa l'altezza di un solido e in ordinata l'area S(x) di una sezione "retta", e si disegna il grafico di y=S(x), per x che va da 0 ad h (altezza del solido), l'***area*** della regione di piano cartesiano al disotto del grafico misura il **volume** del solido ($m.m^2=m^3$).
Se in ascissa si riporta il tempo t e in ordinata la velocità v(t), l'***area*** sottostante al grafico misura lo spazio percorso e va misurata in metri (s.m/s =m). Se in ascissa si riporta il volume V di un gas e in ordinata la pressione p, l'***area*** misura il lavoro ($m^3.N/m^2$ = n.m = Joule). Eccetera.

5. Esercizi.

1°**)** Calcolare l'area della regione piana racchiusa da un'ellisse, sfruttando l'affinità che fa passare dal cerchio di raggio **a** all'ellisse di semiassi **a** e **b**.

2°) Calcolare l'area tra l'arco di parabola $y=kx^2$ e l'asse x, con x in [a, b], generalizzando il problema **1.**.

3°) calcolare l'area tra l'asse x e $y=x^3$ con x in [0, 1], sulla falsariga del problema **1.**

4°) Calcolare il volume di un ellissoide di semiassi **a, b, c** sfuttando l'affinità di $\boldsymbol{R^3}$ che fa passare da una sfera di raggio **a** all'ellissoide. (Equazione canonica della sfera: $x^2+y^2+z^2 = a^2$, dell'ellissoide: $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2 = 1$.
Suggerimento: l'affinità è **x'=x, y'=(b/a)y, z'=(c/a)z,** per cui
$\mathbf{\Delta V'}= \Delta x'.\Delta y'.\Delta z' =\Delta x.(b/a)\Delta y.(c/a)\Delta z = \mathbf{(bc/a^2)\Delta V}$, eccetera.

5°) Se avete risolto l'esercizio **1**, avete trovato $\mathbf{S_{ellisse} =\pi ab}$, che generalizza l'area racchiusa dal cerchio di raggio r, $\mathbf{S_{cerchio} =\pi r^2 = \pi(r.r)}$, essendo il cerchio una ellisse con i semiassi uguali (a=b=r). Per analogia con la lunghezza della circonferenza , $L_C = 2\boldsymbol{\pi}\mathbf{r = \pi(r+r)}$, si potrebbe pensare, generalizzando, che la lunghezza dell'ellisse sia $\mathbf{L_E =\pi(a+b)}$. Sapreste verificare, studiando un caso limite, che questa formula è **sbagliata**?

6°) Il problema di calcolare lunghezze di curve è in generale più difficile che calcolare aree e volumi. Sapreste definire la lunghezza (approssimata) di una curva come lunghezza di una opportuna linea poligonale (cioà a tratti rettilinei)? Come si potrebbe utilizzare tale definizione per scrivere una procedura che approssimi la lunghezza? (calcolo approssimato e, con passaggio al limite, calcolo esatto, è in ultima analisi il calcolo di una somma. Pertanto, calcolo di aree, di lunghezze, di volumi, dal punto di vista astratto, sono la stessa cosa: **calcolo integrale.**

7°) Supponiamo che la velocità di una particella, in funzione del tempo, sia $\mathbf{v = 2t+ 3t^2}$. Si noti che all'istante 0 la velocità è 0, all'istamte 1 la velocità è 5. Posso dire che in questo intervallo di tempo la velocità media è (semisomma) (0+5)/2 = 2,5? Calcolare (esattamente) la lunghezza della traiettoria percorsa tra t=0 e t=5 e ricavare poi la giusta velocità media.