

Spazi vettoriali. (27 e 29-4-2009)

**1. Definizione.** Uno spazio vettoriale  $V$  sul campo  $\mathbf{R}$  dei numeri reali è un insieme non vuoto di elementi (da dirsi punti o vettori), sul quale sono definite due operazioni, addizione (+) e moltiplicazione per uno scalare ( $\cdot$ ), tali che (a)  $(V,+)$  è un gruppo abeliano  $[\underline{v}+(\underline{u}+\underline{w})=(\underline{v}+\underline{u})+\underline{w}]$ , esiste il vettore nullo  $\underline{0}$  per cui  $\underline{v}+\underline{0}=\underline{0}+\underline{v}=\underline{v}$ , esiste il simmetrico (opposto) di  $\underline{v}$ ,  $-\underline{v}$  per cui  $-\underline{v}+\underline{v}=\underline{0}$ ,  $\underline{v}+\underline{u}=\underline{u}+\underline{v}$ ; (b)  $[a(\underline{v}+\underline{u})=a\underline{v}+a\underline{u}$ ,  $(a+b)\underline{v}=a\underline{v}+b\underline{v}$ ,  $(ab)\underline{v}=a(b\underline{v})$ ,  $1.\underline{v}=\underline{v}]$ .

**Esempi.**  $\mathbf{R}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbf{R}$ , se si assumono i numeri come vettori;  $\mathbf{R}^2$  spazio delle coppie ordinate di numeri reali: posto  $\underline{u}=(x,y)$ ,  $\underline{v}=(x',y')$ ,  $\underline{u}+\underline{v}=(x+x', y+y')$  e  $a.\underline{u}=(ax, ay)$ . Si identifica  $\mathbf{R}^2$  col piano cartesiano;  $\mathbf{R}^3$ , spazio delle terne di numeri, eccetera.  $\mathbf{R}^3$  si identifica con lo spazio tridimensionale euclideo cartesiano.

**Dipendenza e indipendenza lineare.** Due o più vettori  $\underline{v}_i$  si dicono linearmente dipendenti o legati, se esistono dei numeri (scalari)  $a_i$  non tutti nulli tali che  $\sum_{i=1}^n a_i \underline{v}_i = \underline{0}$ . Se gli  $n$  vettori non sono legati, si dicono liberi o linearmente indipendenti. Verificare che in  $\mathbf{R}^2$  non si può avere un sistema di più di due vettori liberi. Si dice che  $\underline{u}$  è combinazione lineare di un sistema di vettori, se  $\underline{u} = \sum_{i=1}^n a_i \underline{v}_i$ .

In  $\mathbf{R}^2$  ogni vettore è combinazione lineare di due vettori liberi, che costituiscono una **base** di  $\mathbf{R}^2$ . La base **canonica** è  $\{\underline{i}=(1,0), \underline{j}=(0,1)\}$ , in  $\mathbf{R}^3$  la base canonica è  $\{\underline{i}=(1,0,0), \underline{j}=(0,1,0), \underline{k}=(0,0,1)\}$ , ecc.

**Sottospazi.** Si chiama sottospazio di  $V$  un sottoinsieme che è **chiuso** rispetto alle operazioni di addizione "+" e di moltiplicazione per uno scalare "."

Verificare che in  $\mathbf{R}^2$  l'insieme di vettori  $(x,y)$  tali che  $y=2x$  è un sottospazio; verificare che tutti i vettori  $\underline{w}$  di tale sottospazio si possono scrivere come  $\underline{w} = t.\underline{u}$ , essendo  $\underline{u}=(1,2)$  e  $t$  un parametro reale. I sottospazi **non banali** di  $\mathbf{R}^2$  sono tutti di questo tipo, al variare del vettore  $\underline{u}$ . Siccome una base contiene un solo vettore, si chiamano sottospazi di dimensione 1. Geometricamente, sono rette per l'origine.

**Esercizio:** scrivere l'equazione cartesiana (relazione tra  $x$  e  $y$ ) per il sottospazio  $S$  di  $\mathbf{R}^2$  avente per base  $(a,b)$ .  $S$  possiede altre basi? Quali?

In  $\mathbf{R}^3$  ci sono due tipi di sottospazi non banali: quelli di dimensione 1 e quelli di dimensione 2 (rispettivamente rette e piani per l'origine  $O(0,0,0)$ ;  $O$  si può interpretare come il vettore nullo  $\underline{0}$ ).

Per esempio,  $H=\{t(1,2,-3)\}$  ha  $\dim.=1$ ; scriverne le equazioni cartesiane, cioè equazioni contenenti solo le componenti (o coordinate) del generico vettore  $(x,y,z)$  di  $H$ , eliminando il parametro  $t$ .

Invece il sottospazio  $K=\{a(1,-1,4)+b(2,3,1)\}$  ha dimensione 2; scriverne l'equazione cartesiana, eliminando i parametri  $a$  e  $b$ . [ $x=a+2b$ ,  $y=-a+3b$ ,  $z=4a+b$ , ecc...]

**Varietà lineari.** Se ai vettori di  $S$ , sottospazio di  $V$ , si somma un vettore fisso  $\underline{w}$ , si ottiene un sottoinsieme di  $V$  che si chiama varietà lineare di direzione  $S$  e si indica con  $\underline{w}+S$ . In generale non è un sottospazio, ammenocchè  $\underline{w}$  appartenga ad  $S$ .

**Esercizio.** Può accadere che  $\underline{u}+S$  sia uguale a  $\underline{v}+S$ , se  $\underline{u} \neq \underline{v}$ ? Spiegare.

**Parallelismo.** Due varietà lineari di  $V$ :  $\underline{v}+H$  e  $\underline{w}+K$  si dicono parallele se  $H \subseteq K$  o  $K \subseteq H$ .

In  $\mathbf{R}^2$ , nel caso di varietà non banali, l'unico tipo di parallelismo è  $K=H$  (Due rette sono parallele, se hanno la stessa direzione, la retta per l'origine ad esse parallela). In  $\mathbf{R}^3$ , nel caso di due rette o di due piani, il parallelismo richiede  $H=K$ ; nel caso di una retta e di un piano il parallelismo richiede che la direzione della retta sia contenuta nella direzione del piano (retta per  $O$  contenuta in un piano per  $O$ ).

**Esercizi.** In  $\mathbf{R}^2$ , data la retta (la varietà lineare)  $L_1=\{x=3+2t, y=4-3t\}$ , determinare  $L_2 = \underline{w}+S$  parallela ad  $L_1$  e con  $\underline{w}=(2,-5)$ , cioè la retta parallela a  $L_1$  passante per il punto  $(2,-5)$ . Scrivere poi le equazioni cartesiane di  $L_1$  e di  $L_2$ .

In  $\mathbf{R}^3$ , dato il piano  $2x+y-z+5=0$ , determinare il piano parallelo per  $(1,5,3)$ ; determinare una base per il sottospazio direttore. Dato poi il punto  $P(3,3,2)$ , scrivere le equazioni delle rette parallele ai piani precedenti. (Perché sono tante? Se dico che sono  $\infty^1$ , che cosa intendo esattamente?). Suggerimento:

Il sottospazio direttore dei due piani è  $2x+y-z=0$  e una base è  $\{(1,-2,0), (0,1,1)\}$ , un'altra è  $\{(1,0,2), (1,-1,1)\}$  ecc. Verificare che sia  $\{a(1,-2,0)+b(0,1,1)\}$ , sia  $\{a(1,0,2)+b(1,-1,1)\}$ , per eliminazione dei parametri  $a$  e  $b$  danno **l'equazione cartesiana**  $2x+y-z=0$ .

**Fasci di rette in  $\mathbf{R}^2$ .** *Fasci propri*, rette per un punto. Sia  $x=2+3t, y=-5+4t$  una retta per il punto  $(2,-5)$ ; a ogni valore del parametro  $t$  corrisponde un punto della retta di direzione il vettore  $(3,4)$ .

Considero ora  $x=2+\alpha t, y=-5+\beta t$ ; al variare della coppia  $(\alpha, \beta)$  (vettore direttore, perciò  $\alpha$  e  $\beta$  non possono essere entrambi nulli) ho le infinite rette del fascio di centro  $(2,-5)$ . Scrivo ora il fascio in forma cartesiana, eliminando il parametro  $t$ :  $(x-2)/\alpha = (y+5)/\beta$ , ovvero  $a(x-2)+b(y+5)=0$ . (Ho posto  $a=\beta, b=-\alpha$ ). Siccome  $a$  e  $b$  non possono essere entrambi nulli, i parametri da cui dipendono le rette del fascio **non sono due ma uno**. (Le rette sono  $\infty^1$ ).

*Fasci impropri* (rette parallele). Es.  $2x-3y+k=0$  è un fascio improprio di direzione  $\underline{v}=(3, 2), (\infty^1)$ .

Combinando linearmente con parametri reali  $a$  e  $b$  due rette si ottiene un fascio. Per esempio,

$a(x-y-1)+b(2y-3)=0$  è un fascio proprio il cui centro si trova... .

Trovare il centro del fascio  $kx-(2-k)y+3=0$ ; trovare poi la retta del fascio passante per  $P(1,1)$ , quella di direzione  $\underline{v}=(1,1)$ , quella parallela all'asse  $x$ , quella parallela all'asse  $y$ .

Che dire del fascio  $(k-1)x+(2k-2)y+k-3=0$ ? C'è una limitazione per i valori del parametro  $k$ ?

**Prodotto scalare.** Il prodotto scalare di due vettori  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$  di  $V$  è un **numero** definito da 4 assiomi:

**1°**  $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$ , **2°**  $a(\underline{u} \cdot \underline{v}) = (a\underline{u}) \cdot \underline{v}$ , **3°**  $\underline{w} \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \underline{w} \cdot \underline{u} + \underline{w} \cdot \underline{v}$ , **4°**  $\underline{v} \cdot \underline{v} \geq 0$ .

In  $\mathbf{R}^2$   $(x,y) \cdot (x',y') = xx' + yy'$ , in  $\mathbf{R}^3$   $(x,y,z) \cdot (x',y',z') = xx' + yy' + zz'$ , eccetera.

**Ortogonalità.** Due vettori si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è zero.

Es. in  $\mathbf{R}^2$   $(x,y)$  e  $(y,-x)$ , in  $\mathbf{R}^3$   $(x,y,z)$  e  $(0,z,-y)$ . Trovare tutti i vettori di  $\mathbf{R}^3$  ortogonali a  $\underline{n}=(1,-3,2)$ : che cosa vien fuori? Nel piano di  $\mathbf{R}^3$   $ax+by+cz+d=0$  il vettore  $(a,b,c)$  è ortogonale a tutti i vettori del sottospazio direttore  $ax+by+cz=0$ ; il vettore  $(a,b,c)$  si chiama vettore normale al piano.

Due rette si dicono perpendicolari se i loro vettori direttori sono ortogonali; due piani si dicono perpendicolari se i loro vettori normali sono ortogonali; una retta e un piano si dicono perpendicolari se il vettore direttore della retta è ortogonale a **tutti** i vettori del sottospazio direttore del piano (basta che lo sia a **due** vettori liberi del sottospazio, cioè ai vettori di una sua base, perché...).

**Esempi.** In  $\mathbf{R}^2$  trovare la retta per  $P(2,1)$  perpendicolare alla retta  $r: 2x+3y+557=0$ . Il vettore direttore di  $r$  è  $\underline{r} = (3, -2)$ , il vettore ortogonale è  $(2,3)$ , la retta per  $P$  perpendicolare ad  $r$  è  $x=2+2t, y=1+3t$ . Inventarsi una regola per trovare rapidamente la perpendicolare. In  $\mathbf{R}^2$  non c'è altro da dire.

In  $\mathbf{R}^3$  è dato il piano  $x+y-3z-541=0$  e il punto  $P(1,4,2)$ . Trovare la retta per  $P$  perpendicolare al piano. Trovare i piani per  $P$  perpendicolari al piano dato. Perché sono tanti?

**Norma.** Norma di un vettore  $\underline{v}$  è il numero non negativo  $|\underline{v}| = \sqrt{\underline{v} \cdot \underline{v}} = \sqrt{v^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + \dots + z^2}$ .

**Distanza** di due vettori è la norma della loro differenza. Distanza di due punti  $A$  e  $B$  è la norma della differenza dei vettori  $\underline{u} = \underline{OA}$  e  $\underline{v} = \underline{OB}$ . Distanza di un punto  $P$  da una retta  $r$  di  $\mathbf{R}^2$ : Da  $P$  si mandi la perpendicolare  $s$  alla retta  $r$ , si trovi  $H = r \cap s$ , si calcoli  $|\underline{PH}|$ . Esercizio:  $P(2,3)$ ,  $r: 4x-3y+6=0$ .

Se  $P(x_0, y_0)$  ed  $r$  è  $ax+by+c=0$ , verificare che  $d(P, r) = |\underline{PH}| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  (formula generale).

In  $\mathbf{R}^3$  distanza di  $P(x_0, y_0, z_0)$  dal piano  $\pi: ax+by+cz+q=0$ . Si mandi da  $P$  la retta perpendicolare al piano si trovi l'intersezione  $H$ ,  $d(P, \pi) = |\underline{PH}|$ . Formula:  $d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + q|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ .

Trovare  $d(P, \pi)$ , essendo  $P(2,1,-1)$  e  $\pi: x+y+z-3=0$ , prima con la definizione e poi con la formula.

Distanza di un punto  $P$  di  $\mathbf{R}^3$  da una retta  $r$ : Trovare il piano per  $P$  perpendicolare ad  $r$ , intersezione  $H$  tra retta e piano  $d(P, r) = |\underline{PH}|$ . Es.  $P(1,1,1)$ ,  $r: x=2z, y=3z+2$ . Si trova  $H(0,2,0)$  e poi

$|\underline{PH}| = |(1,-1,1)| = \sqrt{3}$ . **Secondo modo:** Si indichi con  $H$  il punto generico di  $r$ , si determini il vettore  $\underline{PH}$  come differenza delle componenti di  $H$  e di  $P$ , si imponga che  $\underline{PH}$  sia ortogonale ad  $\underline{r}$ , ecc...

**Prodotto scalare e coseno.** Siano  $\underline{u}$  e  $\underline{v}$  vettori non nulli, per ogni  $x$  reale  $(x\underline{u} - \underline{v})^2 \geq 0$ . Sviluppando,  $\underline{u}^2 x^2 - 2(\underline{u}, \underline{v})x + \underline{v}^2 \geq 0 \rightarrow (\underline{u}, \underline{v}) \leq 0 \rightarrow -|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \leq \underline{u}, \underline{v} \leq |\underline{u}| \cdot |\underline{v}|$ , cioè  $-1 \leq \frac{(\underline{u}, \underline{v})}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} \leq 1$  e perciò  $\frac{(\underline{u}, \underline{v})}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$  ci

dà il coseno dell'angolo compreso tra i due vettori. In particolare, se  $\underline{u}$  ha modulo 1 e forma l'angolo  $\alpha$  con  $\underline{i}=(1,0)$ ,  $\underline{u}=(x, y)=x\underline{i} + y\underline{j}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$ .

**Esercizi.** Da qui seguono tutte le formule goniometriche,  $\cos(a-\beta)$ , ecc.

**Applicazioni lineari e matrici.** Ci limitiamo alle applicazioni lineari di  $V$  in  $V$ , invertibili, dette **trasformazioni lineari** di  $V$ . Sono tali che  $f(a\underline{v})=a \cdot f(\underline{v})$  ed  $f(\underline{u}+\underline{v})=f(\underline{u})+f(\underline{v})$ . Verificare che in  $\mathbf{R}^2$   $f((x,y))=(y-x, 2x)$  è una trasformazione lineare. [Infatti  $f(a(x,y))=f(ax, ay)=(ay-ax, 2ax)=a(y-x, 2x)=af(x,y)$ , ecc.]; inoltre  $f$  è invertibile  $x'=y-x, y'=2x \rightarrow x=y'/2, y=x+x'=x'+y'/2$  (si deve risolvere un sistema lineare). Verificare che  $f(x,y)=(2y-2x, x-y)$  è lineare, ma non invertibile.

**Consideriamo  $\mathbf{R}^3$**  (in  $\mathbf{R}^2$  c'è una componente (coordinata) in meno). Siccome ogni vettore  $\underline{v}=(x,y,z)$  si può scrivere come combinazione lineare  $x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$ , una trasformazione lineare  $T$  è conosciuta quando sono conosciute le immagini (i corrispondenti) dei vettori di base. Es:

$T(x,y,z)=(x-2y, 3y-z, x+y+2z)$ . Allora  $T(1,0,0)=(1,0,1)$ ,  $T(0,1,0)=(-2,3,1)$ ,  $T(0,0,1)=(0,-1,2)$  e

$T(x,y,z)=x(1,0,1)+y(-2,3,1)+z(0,-1,2)$ . Scrivo ora una matrice  $3 \times 3$  avente per colonne le immagini

dei vettori di base:  $T = \begin{pmatrix} 1, & -2, & 0 \\ 0, & 3, & -1 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix}$ . Se moltiplico la matrice  $T$  per il vettore (colonna)  $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  (moltiplicazione righe per colonne, adesso una sola colonna), ricostruisco  $T$ :

$$\begin{pmatrix} 1, & -2, & 0 \\ 0, & 3, & -1 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ 3y-z \\ x+y+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ corrispondente di } \underline{v} \text{ scritto anch'esso come vettore colonna.}$$

Che la  $T$  proposta sia davvero una trasformazione (di  $\mathbf{R}^3$ ), cioè che sia invertibile, richiede che il sistema nelle (tre) **incognite**  $x, y, z$  sia risolvibile e determinato in funzione dei **termini noti**  $x', y', z'$ . Ma c'è un modo più semplice ed elegante: occorre che le immagini dei vettori di base siano linearmente indipendenti, in modo che possano costituire anch'essi una base di  $V$  (di  $\mathbf{R}^3$ ). Per ottenere ciò si riduce  $T$  a **forma triangolare**, cioè si fa in modo che al disotto della diagonale ci siano solo zeri:

$$\begin{pmatrix} 1, & -2, & 0 \\ 0, & 3, & -1 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1, & -2, & 0 \\ 0, & 3, & -1 \\ 0, & 3, & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1, & -2, & 0 \\ 0, & 3, & -1 \\ 0, & 0, & 3 \end{pmatrix} \text{ (ho aggiunto alle righe sottostanti opportuni multipli della riga superiore, il che equivale al metodo di addizione e sottrazione per risolvere un sistema).}$$

Se gli elementi della diagonale alla fine sono tutti diversi da zero,  $T$  è invertibile ed è una trasformazione. Se voglio veramente risolvere il sistema, cioè trovare la trasformazione inversa  $T^{-1}$ , procedo così:

$$\begin{pmatrix} 1, & -2, & 0 \\ 0, & 3, & -1 \\ 1, & 1, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1, & -2, & 0 \\ 0, & 3, & -1 \\ 0, & 3, & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z'-x' \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1, & -2, & 0 \\ 0, & 3, & -1 \\ 0, & 0, & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z'-x'-y' \end{pmatrix} \text{ e ora risolvo il sistema a ritroso:}$$

$$z=(z'-x'-y')/3, y=y'+z=y'+(z'-x'-y')/3=(z'-x'+2y')/3, x=x'+2y=(z'-x'+2y')/3+(2z'-2x'+4y')/3=(x'+4y'+3z')/3$$

Di passaggio osservo che il metodo di riduzione a forma triangolare permette di ottenere praticamente gratis il determinante della matrice (quadrata), il cui calcolo altrimenti è sempre più penoso al crescere dell'ordine ( $n^\circ$  di righe =  $n^\circ$  colonne). Verifichiamo nel caso di una matrice di ordine 2.

$$\text{Det}(A) = \text{Det} \begin{pmatrix} 1, & 4 \\ 7, & 5 \end{pmatrix} = \text{Det} \begin{pmatrix} 1, & 4 \\ 0, & -23 \end{pmatrix} = -23, \text{ come si vede con la nota regoletta.}$$

Se qualche elemento della diagonale dopo la riduzione triangolare è zero,  $\text{Det}=0$ .

**Esercizio.** Trovare il determinante della matrice 4x4

$$\begin{pmatrix} 1,0,0,3 \\ 2,1,1,2 \\ 3,1,4,0 \\ 1,1,1,1 \end{pmatrix} \text{ e della matrice } \begin{pmatrix} 2,1,3 \\ 2,1,4 \\ 6,3,10 \end{pmatrix}.$$

**Nota sulle trasformazioni.** In  $\mathbf{R}^2$  una simmetria assiale è una isometria indiretta (infatti abbiamo visto che la sua matrice ha determinante negativo (-1)); invece in  $\mathbf{R}^3$  è diretta perché è equivalente a una rotazione di  $180^\circ$  intorno a una retta (come in  $\mathbf{R}^2$  è diretta la simmetria centrale (rotazione di  $180^\circ$  intorno ad O)). Per esempio, la simmetria assiale rispetto all'asse z è  $x'=-x, y'=-y, z'=z$ , la cui

matrice è  $\begin{pmatrix} 1,0,0 \\ 0,-1,0 \\ 0,0,-1 \end{pmatrix}$  (Det=1). Invece è indiretta la simmetria (ortogonale) rispetto a un piano (riflessione speculare), per esempio, senza scapito di generalità, la riflessione rispetto al piano x,y (z=0) è

$x'=x, y'=y, z'=-z$ , la cui matrice è  $\begin{pmatrix} 1,0,0 \\ 0,1,0 \\ 0,0,-1 \end{pmatrix}$ . In generale, una simmetria di  $V=\mathbf{R}^n$  rispetto a un sotto-

spazio S di dimensione k è diretta se n-k è pari, indiretta se n-k è dispari.. Così, la simmetria centrale di  $\mathbf{R}^3$  rispetto ad O, simmetria rispetto al sottospazio nullo  $\{0\}$  (dimensione zero) è indiretta:  $x'=-x, y'=-y, z'=-z$ . (La matrice ha -1 nei tre posti della diagonale e 0 altrove). Invece le rotazioni sono sempre dirette. Anche le traslazioni, che però **non sono** trasformazioni lineari e quindi non esprimibili con matrici, sono (isometrie) dirette in ogni spazio vettoriale. Per quanto riguarda le omotetie, che in generale sono similitudini che conservano la direzione, esse sono dirette in tutti gli spazi, se il fattore k è positivo; se invece k è negativo, l'omotetia è diretta negli spazio di dimensione pari, indiretta in quelli di dimensione dipari (la cosa è immediata, se si pensa alla matrice).

**Esercizi.**

(a) In  $\mathbf{R}^2$  diciamo  $P_s$  la proiezione ortogonale sulla retta s di equazione  $y=mx$ : se  $P'(x',y')$  è la proiezione di  $P(x,y)$ ,  $P'$  sta su s e  $PP'$  è perpendicolare ad s. Verificare che  $x'=x/(1+m^2)+my/(1+m^2)$ ,

e  $y=mx/(1+m^2)+m^2y/(1+m^2)$ . Perciò la matrice è  $P_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+m^2} & \frac{m}{1+m^2} \\ \frac{m}{1+m^2} & \frac{m^2}{1+m^2} \end{pmatrix}$ , il cui determinante è zero,

come era prevedibile, perché...

(b) Verificare che  $2P-I=S$ , dove I è la matrice della trasformazione identica ed S è la matrice della simmetria rispetto alla retta s, già studiata nel modulo precedente.

(c) Verificare che  $P^2 = P$  e interpretare geometricamente tale risultato.

(d) Determinare, in  $\mathbf{R}^2$ , la proiezione ortogonale di  $\underline{v}=(3,4)$  sulla retta s:  $y=2x$ .

(e) Scrivere la matrice della proiezione di  $\mathbf{R}^2$  sull'asse x e della proiezione sull'asse y. Come si possono ricavare dalla formula generale dell'esercizio (a) ?

(f) In  $\mathbf{R}^3$  trovare le matrici della proiezione (ortogonale) P sul piano (x,y) e della riflessione S (simmetria) rispetto allo stesso piano e verificare che vale sempre  $2P-I=S$ . Ripetere il calcolo per il piano (y,z).

(g) Dati i vettori  $\underline{u}=(1,-1)$  e  $\underline{v}=(2, 3)$ , esprimere il vettore  $\underline{w}=(4,-1)=4\underline{i}-\underline{j}$  come combinazione lineare di  $\underline{u}$  e di  $\underline{v}$ . Trovare il vettore  $\underline{w}'$  proiezione ortogonale di  $\underline{w}$  su  $\underline{u}$  e il vettore  $\underline{w}''$  proiezione ortogonale di  $\underline{w}$  su  $\underline{v}$ .

(h) Più difficile. Dato il vettore  $\underline{v}=(3, 2, 1)$  di  $\mathbf{R}^3$ , determinare la sua proiezione ortogonale  $\underline{w}$  sul sottospazio S (piano per l'origine) di equazione  $x+y-z=0$ . **Suggerimento:** Trovare una base  $\underline{u}_1$  e  $\underline{u}_2$  di S, esprimere  $\underline{w}$  come combinazione lineare, mediante i parametri a e b da determinare, di  $\underline{u}_1$  e  $\underline{u}_2$

e imporre che  $\underline{v} - \underline{w}$  sia ortogonale a  $\underline{u}_1$  e  $\underline{u}_2$ . Si ottiene un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite a e b.