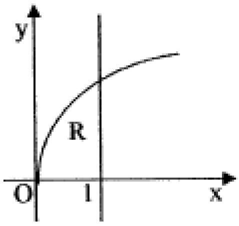
Ottavio Serra

Quesiti esami di stato 2007 (27-4-2009)

QUESTIONARIO Ordinamento 2007

1. La regione R delimitata dal grafico di y = $2\sqrt{x}$,
dall'asse x e dalla retta x = 1 (vedi figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
3. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione: $x^3 - x^2 - k + 1 = 0$.
4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.
5. Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del teorema del valor medio (o teorema di Lagrange) sull'intervallo [-2, 2]. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.
6. Si sa che il prezzo p di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?
7. Se f(x) è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo [-2, 2], che dire del suo integrale esteso a tale intervallo? Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione 3+ f(x)?
8. Si risolva l'equazione:

$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}$$

9. Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a meridiani e a paralleli, a latitudini e a longitudini. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

QUESTIONARIO PNI 2007

1. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.
2. La regione del piano racchiusa tra il grafico della funzione y = ln x e l'asse x, con $1 \le x \le e$, è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte rettangoli aventi l'altezza tripla della base. Si calcoli il volume di S e se ne dia un valore approssimato a meno di 10^{-2}.
3. Si dimostri che l'insieme delle omotetie con centro O fissato è un gruppo.
4. Si consideri la funzione:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Se ne spieghi l'importanza nelle applicazioni della matematica illustrando il significato di μ, σ, σ^2 e come tali parametri influenzino il grafico di f(x).
5. Si consideri il teorema: «la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria non-euclidea. Quali le formulazioni nella geometria iperbolica e in quella ellittica? Si accompagni la spiegazione con il disegno.
6. Si scelga a caso un punto P all'interno di un triangolo equilatero il cui lato ha lunghezza 3.
Si determini la probabilità che la distanza di P da ogni vertice sia maggiore di 1.
7. Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 +1$ nel punto (1, 2).
8. A Leonardo Eulero (1707-1783), di cui quest'anno ricorre il terzo centenario della nascita, si deve il seguente problema: «Tre gentiluomini giocano insieme: nella prima partita il primo perde, a favore degli altri due, tanto denaro quanto ne possiede ciascuno di loro. Nella successiva, il secondo gentiluomo perde a favore di ciascuno degli altri due tanto denaro quanto essi già ne possiedono. Da ultimo, nella terza partita, il primo e il secondo guadagnano ciascuno dal terzo gentiluomo tanto denaro quanto ne avevano prima. A questo punto smettono e trovano che ciascuno ha la stessa somma, cioè 24 luigi. Si domanda con quanto denaro ciascuno si sedette a giocare».
9. Si dimostri che l'equazione $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ ha un'unica radice reale e si trovi il suo valore con una precisione di due cifre significative.
10. Come il 10 di Ordinamento.

Avvio alla soluzione.

Ordinamento.

1.I triangoli equilateri hanno lato $l= 2\sqrt{x}$ perciò hanno area $S=l^2\sqrt{3}/4 = x\sqrt{3}$ e il volune richiesto si trova o con un integrale immediato (addirittura col la formula dell'"*area*" del triangolo rettangolo), oppure affettando il solido in n fette e *sommando le fette triangolari* di spessore h = 1/n per x che va da 0 a 1. $V= h[1.h\sqrt{3} +2.h\sqrt{3} +3.h\sqrt{3}+\ldots+n.h\sqrt{3}]=$
$= h^2\sqrt{3}[1+2+3+\ldots+n] =(1/n)^2\sqrt{3}\ [n(n+1)/2]$ e per $n\to\infty$ (fette sempre più sottili) $V \to \sqrt{3}/2$.
2. Applicare il teorema del coseno. Per l'angolo α opposto al lato di 8 dm ho: $64=16+36-2.4.6.\cos\alpha$ $\to \cos\alpha =(16+36-64)/48 = -12/48 = -¼ \to \alpha = (104,4775)° = 104° 29'$.
3. Si trovino le intersezioni di $y = f(x) =x^3 - x^2$ col fascio di rette y=k-1. Il grafico di f copre tutto R (f è suriettiva di R→R), ha un massimo relativo per x=0 (**a vista**!) e un minimo relativo (tra 0 e 1) da determinare con le derivate (3/3, -4/27). Perciò l'equazione ha una soluzione per k<23/27 o per k>1, tre soluzioni (contando le molteplicità) per $23/27 \le k \le 1$. (senza le derivate che cosa **non si poteva precisare?**).
4. Se l'apotema è 1 metro, detta x l'altezza, il raggio di base è $y=\sqrt{1-x^2}$ e $V=(\pi/3)x(1-x^2)$. con x >0 e <1.La derivata di $x-x^3$ si annulla per $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e perciò $V_{max}=\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{27} = \ldots$
5. Farlo da soli.
6. $p(1+6/100)(1-6/100) =p(1-6/100)(1+6/100)=p(1-(6/100)^2)$.
7. Ovviamente l'integrale è zero. Il secondo integrale vale 12 (area di un rettangolo).
8. Deve essere n>4 (perché?). 4n(n-1)(n-2)(n-3)/24 = 15(n-2)(2-3)(n-4)/6 → n(n-1)/6 = (5/2)(n-4) → n=6 oppure n=10.
9. Per sostituzione e poi a scelta: $\dfrac{1}{2}(arcsenx + x\sqrt{1-x^2})$. L'integrale tra 0 e 1 è $\pi/4$, area di un quarto di cerchiodi raggio 1.
10. ……. **Meridiani e paralleli…………….**

PNI

1. Vedi nel mio sito "*I problemi impossibili della geometria greca*".

2. L'area della sezione $S=3\log^2 x$ e il volume V = Integr[1,e](Sdx). Per chi sa farlo, procedendo per *parti*, si trova che una primitiva di S è $3[x\log^2 x-2x\log x+2x]$ e V=3(e-2) = 2,1548…Chi non riesce a trovare la primitiva di S, trovi un valore approssimato di V con un metodo numerico, per esempio col metodo dei trapezi.
3. Le omotetie di centro fisso O formano un gruppo, addirittura abeliano, perché isomorfo al gruppo moltiplicativo dei numeri reali diversi da zero. Inoltre, il gruppo delle omotetie è il **centro** del gruppo delle trasformazioni lineari del piano, nel senso che un'omotetia commuta con ogni trasformazione lineare.
4. f(x) è la funzione *gaussiana densità di probabilità*; il suo integrale da $-\infty$ a z dà la probabilità che una variale casuale di valore medio μ e scarto quadratico medio σ abbia valore minore di z. La varianza è var= σ^2 . Più la varianza è piccola, più il grafico di f(x) è stretto, più le misure sono accurate.
5. Nelle geometrie non euclidee la somma degli angoli è diversa da π. Nella geometria iperbolica caratterizzata dal postulato: *per un punto passano due parallele a una retta,* la somma è <π: nella geometria ellittica: *non esistono rette parallele*, la somma è > π. Nella geometria iperbolica l'area di un triangolo è proporzionale al *difetto angolare*=π-*(somma angoli),* nella geometria ellittica è proporzionale all'*eccesso sferico*=(somma angoli)-π. Non esistono figure simili non congruenti, ecc.
6. Il punto P deve stare (nel triangolo, ma) fuori dei tre settori circolari (uguali) di centro i vertici e raggio 1. Siccome essi hanno angolo al centro di 60°, ciascuno ha area π/6, perciò la probabilità cercata è $P=\dfrac{\dfrac{3^2\sqrt{3}}{4}-3\dfrac{\pi}{6}}{\dfrac{3^2\sqrt{3}}{4}}=1-\dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}\approx 0,5969.$
7. I centri descrivono la normale alla parabola, cioè la perpendicolare per P alla tangente: il luogo è la retta y= -x/2+5/2.
8. Si deve risolvere un sistema lineare: si trova che x=39 luigi, y=21, z= 12. Generalizzare il problema al caso in cui alla fine si trovino ciascuno con n luigi e determinare anche la soluzione minima.
9. La funzione è crescente (derivata positiva su tutto R) e y(-1)<0, y(-0.5)>0, dunque la radice z cade tra -1 e -0.5 anzi tra -0.7 e -0.6, precisamente z=-0.67.
10. Come il 10 di ordinamento.