Ottavio Serra

Quesiti Esami di stato 2006, 27/4/2009

QUESTIONARIO Esami di stato 2006 ordinamento

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di 50 cm^2, margini superiore e inferiore di *4 cm* e margini laterali di *2 cm*. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?
4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di 1 metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.
6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k \cos 2x - 5k + 2 = 0$, dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si risolva il problema al variare di k.
7. La funzione $x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0,1]$? Se si, trova il punto ξ che compare nella formula $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.
8. La funzione $f(x) = tgx$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?
9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?
10. La funzione $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4\pi}{3}$ e inoltre $f(\frac{2\pi}{3}) = 1$. Si trovino *a* e *b* e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Questionario esami di stato 2006 PNI (Quelli uguali a ordinamento non sono riportati)

3. In un piano sono dati una retta r e due punti A e B ad essa esterni ma situati nel medesimo semipiano di origine r. Si trovi il più breve cammino che congiunga A con B toccando r.
4. Si dimostri che l'equazione sen $x = x - 1$ ha una e una sola radice α e, utilizzando una calcolatrice tascabile, se ne dia una stima. Si descriva altresì una procedura di calcolo che consenta di approssimare α con la precisione voluta.
7. *Bruno de Finetti* (1906-1985), **e la definizione soggettivistica della probabilità.**
8. Un tiratore spara ripetutamente ad un bersaglio; la probabilità di colpirlo è di 0,3 per ciascun tiro. Quanti tiri deve fare per avere probabilità ≥ 0,99 di colpirlo almeno una volta?
10. Tenuto conto che: $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$, calcola un'approssimazione di π utilizzando uno dei metodi di integrazione numerica studiati.

Accenno di soluzione.

1. N° chicchi = $1+2+2^2+\ldots+2^{63} = 2^{64} - 1 \approx 2^{64} \approx 1{,}845.10^{19} \approx 7.10^{17}$ grammi $\approx$ 70 miliardi di ton. (progressione geometrica e logaritmi).
2. La somma delle facce angolari di un angoloide è<360°. (Se infatti l'angoloide si schiaccia su un piano, le facce si allargano e la loro somma arriva a 360°). In un vertice del poliedro devono concorrere almeno tre facce e queste devono essere poligoni regolari. Con triangoli (regolari) possono concorrere 3 facce (somma 180°), tetraedro, 4 facce (somma 240°), ottaedro, 5 facce (somma 300°), icosaedro e basta (6 facce darebbero 360°). Con quadrati possono concorrere 3 facce (somma 270°), esaedro o cubo, e basta. Con pentagoni possono concorrere 3 facce (somma 3.108° =324°), dodeca-

dro e basta. Non è possibile che concorrano altri poligoni, perché già con l'esagono 3 facce darebbero 3.120° = 360°. Dunque i poliedri regolari sono 5.
3. Detta x la larghezza e y l'altezza x<y) dell'area di stampa,le domensioni del foglio sono x+4 e y+8. L'area del foglio è S=(x+4).(y+8)=xy+8x+4y+32=8x+4y+82=8x+200/x +82. L'area è minima quando è minima la f(x)=x+25/x. Qui convengono le derivate: $f'(x)=1-25/x^2$ che è >0 per x>5 (x deve essere positiva!). Perciò il foglio minimo si ha per x=5, y=10 e le dimensioni del foglio sono 5+4=9, 10+8=18.
4. La diagonale del cubo è uguale al diametro della sfera, perciò lo spigolo del cubo è $x= 1/\sqrt{3}$ m e il volume è $V=1/(3\sqrt{3})=\sqrt{3}/9\ m^3 = 1000\sqrt{3}/9$ litri $\approx$ 192,5 litri($\approx$27% del volume della sfera).
5. Si applichi la formula del binomio al caso a=b=1.
6. $0°<2x<90° \rightarrow 0<\cos(2x)=(5k-2)/k<\sqrt{3}/2 \rightarrow 2/5 < k< 4/(10-\sqrt{3})$ [0,40<k<0,48…].
7. $x^3 - 2x^2$ è coπntinua in [0, 1] e derivabile nei punt interni (è derivabile in tutto R), perciò soddisfa il teorema di Lagrange. $-1=f'(\xi) \rightarrow 3\xi^2 -4\xi +1=0 \rightarrow \xi = 1/3$.
8. la funzione non è né continusa né derivable in tutto *I*, non è definita in π/2.
9. $f(x)=e^x$.
10. $a=\sqrt{3}$ e b=1.

PNI.

3. E' un problema classicodi minimo cammino, applicabile alla riflessione della luce (Fermat) e al rimbalzodi una bilia sul bordo. Si costruiscail simmetrico B' di B rispetto alla retta s e si congiunga B' con A: il segmento Abì interseca s nel punto O di cammino minimo. Segueche AO e OB formano angoli uguali con s. Come si generalizza il problema, se vogliamo colpire B da A con riflessione su due sponde consecutive del biliardo?
4. Risolvere l'equazione sen $x = x - 1$ equivale a intersecare il grafico di y= sen x –x +1 con l'asse x.. La funzione f(x)=sen x –x +1 è non crescente su ***R*** e va da valori positivi (f(1)=sen 1>0) a valori negativi (f(2) =sen 2-1<0). Perciò l'unica soluzione cade tra 1 e 2. Siccome f(1.5)>0, la soluzione α cade tra 1.5 e 2. Esiccome anche f(1.9)=0.046>0, sarà 1.9< α <2, anzi 1.93< α <1.94. Questo è il principio del metodo di bisezione. Soluzione in [a,b]: pongo S:=f(a), D:=f(b), S.D<0. **Ripeti** c:=(a+b)/2; se f(c).S>0 allora a:=c altrimenti b:=c **finchè** |b-a|< epsilon. c è la soluzione.
7. Vedi un testo di probabilità.
8. il numero n dei tiri è tale che $1-(1-p)^n >0{,}99$ cioè $(0{,}7)^n< 0{,}01 \rightarrow (10/7)^n>100 \rightarrow n>2/(1-\mathrm{Log}_{10}7)$ e quindi n almeno 13.
10. Si può dividere l'intervallo [0,1] in n parti uguali e approssimare l'area al di sotto della funzione $f(x)=1/(1+x^2)$ con trapezi. Area $S_c = (1/n)[(f(1)+f(0))/2+ f(1/n)+f(2/n)+…+f(1-1/n)]$. Un'altra formula, che non utilizza gli estremi e prende i centri degli intervalli precedenti, detta formula dei trapezi aperta, è Sa=(1/n)[f(1/2n)+f(3/2n)+… + f(1-1/2n)]. Una dà un valore per difetto, nel nostro caso Sa, l'altra per eccesso, perciò si può stimare l'errore. Si ottiene π tra $4S_a$ e $4S_c$.