Ottavio Serra

Quesiti ed esercizi. 22/4/2009

Riporto, con avvio alla soluzione, alcuni dei quesiti degli esami di stato.

Questionario Esami di stato 2005, Ordinamento.

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare sen18°, sen36°.
2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 litri, quali devono essere le sue dimensioni in centimetri, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
3. Si dimostri che la curva y = x sen x è tangente alla retta y = x quando sen x = 1 ed è tangente alla retta y = −x quando sen x = −1
4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
5. Il numero e di Nepero [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di ex è ancora ex ?
6. Come si definisce n! (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perchè?
7. Se f (x) =x4-4x3+4x2+3, per quanti numeri reali k è f(k) = 2 ? Si illustri il ragionamento seguito.
8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. E’ un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?
9. Si calcoli, senza l’aiuto della calcolatrice, il valore di: $sen^2 35° + sen^2 55°$.
10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione

$$f(x) = arctgx - arctg\frac{x-1}{x+1}$$

è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Questionario Esami di stato 2005, PNI (Non riporto i quesiti uguali a quelli di Ordinamento)

3. Si determinino le equazioni di due simmetrie assiali σ e φ la cui composizione σ oφ dia luogo alla traslazione di equazione: $x' = x + \sqrt{5}, y' = y - \sqrt{5}$.
Si determinino poi le equazioni della trasformazione che si ottiene componendo le due simmetrie in ordine inverso φoσ .
6. Le rette r ed s d’equazioni rispettive y = 1 + 2x e y = 2x - 4 si corrispondono in una omotetia ω di centro l’origine O. Si determini ω.
8. Si trovi l’equazione della retta tangente alla curva di equazioni parametriche $x=e^t+2$, $y=e^{-t}+3$ nel suo punto di coordinate (3, 4).
9. Quale è la probabilità di ottenere “10” lanciando due dadi? Se i lanci vengono ripetuti, quale è la probabilità di avere due 10 in sei lanci? E quale è la probabilità di avere almeno due 10 in sei lanci?

Avvio alla soluzione. Ordinamento.

1. Tracciare la bisettie di un angolo alla base nel triangolo isoscele avente due lati uguali al raggio e per base L_{10} (l’angolo al vertice è 1/10 di giro). Sen18° = $1/2L_{10}/r$, Cos18°=… e poi Sen36°=…
2. Porre x=raggio di base, y altezza. Esprimerey in funzione di x, sapendo che V è fisso ed esprimere l’area della superfcie totale in funzione di x. Fin qui ci arrivano tutti: $S=2\pi x^2+2V/x$.
Chi sa le derivate trova poi che S è minima per $x = \sqrt[3]{V/2\pi}$ e y = 2x (altezza =diametro di base).
3. Un po’ di derivate.
4. Con le derivate è banale, evitiamo le derivate. Detti x e y i lati del rettangolo, x+y=p (semiperimetro), xy=S (area), si osservi che (x-y)2 ≥ 0, valendo il segno “ = “ se x=y. Si ottiene x2+y2 -2xy ≥ 0 → (x+y)2 – 4xy ≥ 0 → p2 – 4xy ≥ 0 → xy ≤ p2/4 , valendo il segno “ = “ se x=y, cioè se il rettangolo è quadrato. Questo è un caso particolare del problema degli “isoperimetri” , a parità di perimetro l’area racchiusa è massima per un poligono regolare e cresce col numero dei lati,

per esempio dimostrare che l'area dell'esagono regolare di semiperimetro p è $\frac{p^2\sqrt{3}}{6} > \frac{p^2}{4}$. Calcolare l'area dell'ennagono regolare di semiperimetro p e farne il limite per n → ∞ (L'area del cerchio di lunghezza 2p è l'estremo superiore delle aree dei poligoni regolari di perimetro 2p).

5. La definizione l'abbiamo vista $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ e vale anche se sostituiamo n con una variabile reale z: $e = \lim_{z\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z$, da cui segue $\lim_{z\to\pm\infty}\left(1+\frac{x}{z}\right)^z = e^x$. Seguono due limiti notevoli: $\lim_{x\to 0}\frac{Log_a(1+x)}{x} = Log_a(e) = \frac{1}{\log_e(a)}$ e $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \log_e(a)$, dai quali emerge la comodità di prendere esponenziali e logaritmi in base e. La definizione mal si presta al calcolo numerico del numero "e" perché è instabile, occorre lo sviluppo in polinomio di Taylor.

6. Trattato a lezione

7. Non è necessario buttarsi sulle derivate. Dire che $x^4-4x^3+4x^2+3 = 2$ significa $x^4-4x^3+4x^2+1 = 0$, le cui soluzioni sono le ascisse dei punti di intersezione di $y = x^4-4x^3+4x2$ e di $y = -1$. Ma $x^4-4x^3+4x^2 = x^2(x-2)2 \geq 0$ per tutti gli x. Perciò non ci sono numeri reali k tali che f(k) = 2.

8. L'ottaedro è formato da due piramidi a base quadrata e vertici al centro di due facce opposte, per esempio quella superiore e quella inferiore del cubo. La base quadrata è il quadrato con i vertici al centro delle quattro facce laterali del cubo e il lato è $1/\sqrt{2}$ (assunto = 1 lo spigolo del cubo). Tutti gli altri spigoli dell'ottaedro sono $1/\sqrt{2}$. L'altezza di ciascuna delle due piramidi costituenti l'ottaedro è ½, perciò il volume dell'ottaedro è $2.(1/3).(1/\sqrt{2})^2.(1/2) = 1/6$.

9. 55° è il complementare di 35°…

10. L'errore è dovuto al fatto che derivata zero garantisce funzione costante solo se il dominio è un intervallo; nel nostro caso ciò non è, perché la f non è definita per x= –1.

Avvio alla soluzione. PNI.

3. Le simmetrie devono avere per asse y=x+a la φ e y=x+b la σ; la composizione σ o φ è la traslazione con vettore **v** ortogonale ai due assi e modulo $v = (a+b)/\sqrt{2}$, perciò **v** (a-b, -a+b), quindi $a-b=\sqrt{5} \rightarrow b=a-\sqrt{5}$. Componendo le due simmetrie in ordine inverso, si ottiene la traslazione opposta: $\tau^{-1}_{\mathbf{v}} = \tau_{-\mathbf{v}}$. Con un calcolo diretto, φ(x,y)=(y-a,x+a), σ(x,y)=(y-b,x+b), perciò

$$\sigma \circ \varphi(x,y)=(x+a-b,y-a+b) \rightarrow a-b=\sqrt{5} \rightarrow \sigma \circ \varphi = \tau_{\mathbf{v}(\sqrt{5},-\sqrt{5})}.$$

Risulta $\varphi \circ \sigma = \tau^{-1}_{\mathbf{v}} = \tau_{-\mathbf{v}}$.

5. L'omotetia ω(x,y)=(-4x,-4y).

8. Eliminando il parametro t, si trova y=3+1/(x-2). Si può trovare il coefficiente angolare m, se si vuole, con la regola di Ruffini: m=-1, eccetera…

9. La somma "10" si può ottenere in 3 modi. 4+6,5+5,6+4. Perciò la Probabilità è $P_1 = 3/36 = 1/12$.

Probabilità di 2 "10" in sei lanci: $P_2 = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^4 = 15.11^4/12^6 = \approx 0{,}07$.

La probabilità di almeno due "10" in 6 lanci è $P_3 = 1-(11/12)^6-6.(1/12).(11/12)^5 = \approx 0{,}73$.