

Affinità. Traslazioni rotazioni omotetie simmetrie

1.) **Traslazione.** $\tau: \underline{r}' = \underline{r} + \underline{v} \rightarrow \{x' = x + x_0, y' = y + y_0, \dots z' = z + z_0\}$.
 Se $s: ax+by+c=0$ è una retta, $s': a(x'-x_0)+b(y'-y_0)+c=0$ e s' parallela ad s .
 Verificare che τ è una isometria $O(0,0) \rightarrow O'(x_0, y_0)$, $P(x,y) \rightarrow P'(x+x_0, y+y_0)$ e
 $d^2(O'P') = (x+x_0-x_0)^2 + (y+y_0-y_0)^2 = x^2 + y^2 = d^2(OP)$. Idem in tre dimensioni. Quindi le traslazioni sono **isometrie** (dirette, cioè coservano le distanze e il verso di percorrenza del contorno di una figura).
 Le τ formano un gruppo abeliano. Con notazione additiva τ^{-1} è $-\tau$ (la traslazione con vettore opposto $-\underline{v}$).

2.) **Rotazioni.** Rotazione (piana) di un angolo θ intorno a $O(0, 0)$:
 $x' = x \cos \theta - y \sin \theta, y' = x \sin \theta + y \cos \theta$.
 Le rotazioni intorno a C formano un gruppo abeliano;
 se $R = R(O, \theta)$, $R^{-1} = -R = R(O, -\theta)$, $R(O, \alpha) \circ R(O, \beta) = R(O, \beta + \alpha)$, ecc.
 Si noti che le rotazioni con θ di *multiplo di* $\alpha = 2\pi/n$ costituiscono un sottogruppo di ordine n , la rotazione nulla (*neutra*) è quella di angolo 2π (congruo a 0).
 Le rotazioni sono *isometrie dirette*. Intanto il centro O (in generale C , cui si può giungere con una traslazione) è punto fisso e si verifica facilmente che $d(OP') = d(OP)$.

NOTA. Componendo una rotazione con una traslazione, si ottiene una isometria, perché...

3.) **Omotetie.** Un'omotetia (non degenera) ω di centro $C(x_0, y_0)$ è una corrispondenza biunivoca $P \rightarrow P'$ tale che: C è fisso, P e P' allineati con C , e per ogni altra coppia Q, Q' di punti corrispondenti, $P'Q'$ è parallela a PQ . **Equazioni**: $x' = x_0 + k(x - x_0), y' = y_0 + k(y - y_0)$. Senza perdere in generalità, si può pensare $C=O$, per cui $x' = kx, y' = ky$. ($k \neq 0$). Le omotetie di centro O (C) formano un gruppo abeliano $\omega^{-1}(O, k) = \omega(O, 1/k)$. Sono particolari similitudini (dirette) di rapporto k . Composte con isometrie formano il gruppo delle similitudini dirette. **Equazioni ($C=O$):**
 $(x', y') = \tau \circ R \circ \omega(x, y) = \tau \circ R(kx, ky) = \tau(kx \cos \theta - ky \sin \theta, kx \sin \theta + ky \cos \theta) =$
 $(kx \cos \theta - ky \sin \theta + x_0, kx \sin \theta + ky \cos \theta + y_0)$, essendo (x_0, y_0) il vettore di τ .

4.) Simmetrie assiali nel piano.

(Le simmetrie centrali nel piano sono rotazioni di un angolo piatto).

Se r è una retta del piano la simmetria (ortogonale) di asse r , σ_r , è così definita: se $P' = \sigma_r(P)$, allora il punto medio $M(P, P')$ sta su r e PP' è perpendicolare ad r .

Casi particolari

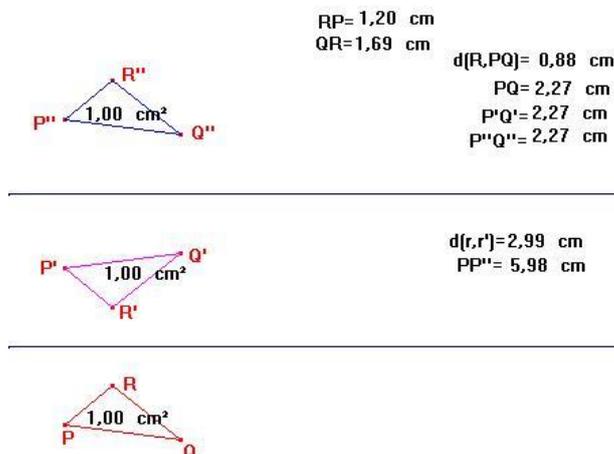
1: r parallela all'asse $x, y=b$; allora $x'=x, y'=2b-y$.

2: r parallela all'asse $y, x=a$; allora $x'=2a-x, y'=y$.

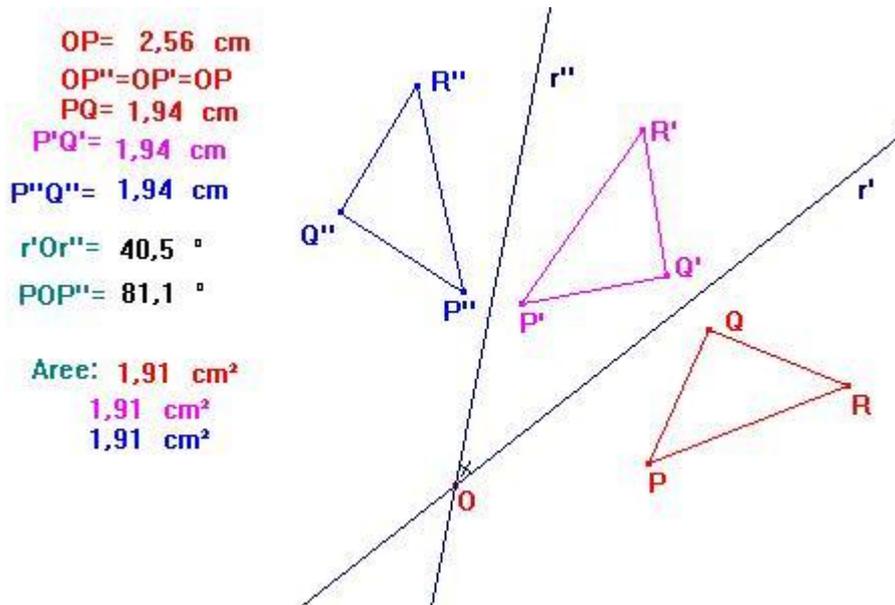
3: l'asse è $y=x$; allora $x'=y, y'=x$.

4: l'asse è $y=-x$; allora $x'=-y, y'=-x$. **Verificare.**

Le simmetrie assiali *non formano gruppo*. Sono isometrie indirette (scambiano il verso di circolazione sul bordo). Sono *involutorie* $\sigma^{-1} = \sigma$. La composizione di due simmetrie assiali ad assi paralleli è una traslazione, ad assi incidenti è una rotazione. Vedi figure seguenti.



La composta $\sigma_r \circ \sigma_r = \tau_v$, essendo \underline{v} il vettore ortogonale ad r , di modulo $2d$, distanza tra r ed r' , diretto verso r' . Infatti, detta a la distanza di P da r , b quella di P' da r' , $PP''=2a$, $P'P''=2b$ e $PP''=2(a+b)=2d$.



La rotazione composta ha centro O e angolo di rotazione $\theta = 2$ angolo tra r' ed r'' .

Si noti che componendo due simmetrie assiali, isometrie indirette, si ottiene una isometria diretta;

In generale, componendo un numero pari di simmetrie assiali si ha una isometria diretta, un numero dispari una simmetria indiretta.

NOTA. Le rotazioni e le omotetie di centro O , le simmetrie assiali con asse passante per O , sono un caso particolare di trasformazioni lineari del piano in sé che conservano il parallelismo di coppie di rette parallele e lasciano fiso O , le simmetrie hanno inoltre l'asse come luogo di punti fissi. Esse perciò sono rappresentabili con matrici (2×2) le cui colonne rappresentano i corrispondenti dei vettori di base $\underline{i} = (1, 0)$ e $\underline{j} = (0, 1)$.

Matrice della rotazione: $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, [righe x colonne, ovvio].

Matrice dell'omotetia: $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Matrice della simmetria assiale, con asse $y=mx$: $\begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{m^2-1}{1+m^2} \end{pmatrix}$. Verificare con la definizione.

Affinità parallela all'asse y : $x'=x$, $y'=hy$. Matrice: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$. Non è una isometria, né una similitudine, le aree sono moltiplicate per h (verificare con un conveniente triangolo).

Trasformazione lineare $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $ad-bc \neq 0$. Verificare che T trasforma una figura (piana) F in

una figura F' con $\text{area}(F') = |ad-bc| \cdot \text{area}(F)$; T è un'equivalenza se $|ad-bc|=1$. È un'isometria se $ab+cd=0$ e $a^2+c^2 = b^2+d^2 = 1$. (Matrice unitaria o ortogonale).