Ottavio Serra

Spazi di probabiltà discreti.

1) Richiami.

La probabilità di un evento è un numero p compreso tra 0 e 1, che gode delle seguenti proprietà:

1° $p(A\cup B) = p(A)+p(B)- p(A\cap B)$; Spiegare a livello intuitivo.

2° $p(A/B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ La probabilità di A condizionata al verificarsi di B è la probabilità della parte di A inclusa in B. Per simmetria $p(B/A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$ e quindi

$$p(A\cap B) = p(B).p(A/B) = p(A).p(B/A)$$

3° Se A_1, A_2, … A_n,…è una successione di eventi incompatibil (cioè a due a due disgiunti), allora

$$p(\bigcup_{k\in N} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} p(A_k) \quad \text{(additività numerabile)}$$

La probabilità dell'unione numerabile di insiemi disgiunti (cioè di eventi incompatibili) è la somma della serie delle singole probabilità. E' chiaro che la serie deve convergere a un numero (non negativo e) non maggiore di 1.

4° Se due eventi A e B sono incompatibili, cioè se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro, e inoltre sono complementari (uno dei due si deve verificare), allora p(A)+p(B)=1.

[p+q=1]

Esempio1. In un'urna ci siano 7 gettoni bianchi e 3 neri. Se riteniamo che ogni gettone ha la stessa probabilità di essere estratto, (distribuzione ***uniforme***) allora p=p(bianco)=7/10 e a q=p(nero)=3/10. p+q=1. Se però nell'urna ci sono anche 8 gettono rossi, p+q= 7/18+3/18 = 10/18 <1.

Esempio2. Un tiratore ha probabilità p=0,7 di colpir il bersaglio: che probabilità ha di colpire almeno una volta in 3 tiri?

I Metodo: P(almeno una volta su 3) = 1 – P(nessuna volta) = 1- $(0,3)^3$ = 0,973.

II Metodo: detta q la probabilità di non colpire (p+q=1 → q= 1-0,7 = 0.3), si ha

P(almeno una volta su 3) = (pqq+qpq+qqp)+(ppq+pqp+qpp)+(ppp) = $3(pq^2)+3(p^2q)+p^3$ =0,973

(Meglio il primo metodo!).

Esempio3. Lanciando due dadi i risultati vanno da 2 (=1+1) a 12 (=6+6). La somma 7 è la più probabile: come mai? Il primo a dare una giustificazione fu Galilei. (Si intende, dadi non truccati).

Esempio4. Due amici ugualmente bravi a briscola (o scopa) puntano somme uguali con l'accordo che vince l'intera posta chi per primo arriva a 5 vittorie. Le mogli però li interrompono quando il primo ha vinto 4 partite e il secondo 3. Come devono dividersi la posta? (Problema proposto dal cavaliere de Mèray a Pascal). Suggerimento: il primo vince il torneo se impedisce al secondo di vincere due partite consecutive: P(primo) = p+qp, P(secondo) = qq. Siccome p=q=1/2,
P(primo) =3/4 e P(secondo) = ¼, perciò la posta va divisa nella proporzione di 3 ad 1.
Generalizzare per p e q generiche e nell'ipotesi che al 1° manchino x partite e al 2° ne manchino y.

Esempio5. Qual'è la probabilità di fare ambo alla ruota di Napoli? I numeri sono 90 e se ne estraggoo 5 perciò lo spazio degli eventi è $C_{90,5} = \binom{90}{5} = \dfrac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5}$. I casi favorevoli sono dati da quelle cinquine che contengono i numeri puntati, tolti i quali gli altri 3 possono essere qualunque, dunque i casi favorevoli sono $C_{88,3} = \binom{88}{3} = \dfrac{88.87.86}{1.2.3}$ e

P(ambo)= $\dfrac{88.87.86}{1.2.3}.\dfrac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86} = \dfrac{4.5}{90.89} = \dfrac{2}{9.89} = \dfrac{2}{801}$.

Esercizio. Calcolare le probalitù P(terno), P(quaterna), P(cinquina).

Esempio6. Totocalcio. Supponendo di trascurare il fattore campo e la forza delle squadre, siccome ogni partita ha 3 risultati : 1, x, 2, la probabilità di azzeccare il risultato è p=1/3 e di sbagliarlo è perciò q= 2/3. La probabilità di imbroccare k risultati su 13 sarà P(k su 13)= $\binom{13}{k}(1/3)^k(2/3)^{13-k}$.

Verificare che $\sum_{k=0}^{13}\binom{13}{k}(1/3)^k(2/3)^{13-k}=1$.

Qual è la probabilità di fare almeno un punto sulla schedina? E di fare meno di 3 punti?

Esempio7. Lanciando una moneta 10 volte (è lo stesso che 10 monete in una volta), qual'è la probabilità di ottenere esattamente 3 teste? E quella di ottenere almeno 3 Teste?.

E' più probabile ottenere 10 Teste su 10 lanci, oppure 5 Teste seguite da 5 Croci?

Qual è la probabilità di ottenere 5 Teste e 5 Croci, se si prescinde dall'ordine?

Esempio8. Il calcolo delle probabilità è nato dai giochi d'azzardo, ma ha applicazioni <u>*serie*</u> in statistica, economia, analisi matematica, fisica. Di un'applicazione in analisi matematica, al calcolo di un integrale multiplo, parleremo in un incontro successivo (Metodi *Monte Carlo*); qui darò un assaggio delle applicazioni alla meccanica statistica. Supponiamo di avere due particelle: molecole, fotoni, elettroni, e tre celle (stati quantici) in cui si possono disporre. Se le particelle sono ***distinguibili***, come molecole a b (marcabili con un nucleo radioattivo), ho 9 possibili distribuzioni: *le disposizioni con ripetizione* di 3 elementib(le celle) a 2 a 2 (le particelle); ciò conduce alla statistica che impiegò Boltzman per interpretare la termodinamica in termini statistici (2° principio, entropia, ecc.). Se però le particelle sono indistinguibili in linea di principio, come fotoni o nuclei di elio, (b=a), le distribuzioni sono solo 6: le *combinazioni con ripetizione*; questa statistica, ideata dall'indiano Bose, fu applicata da Einstein per ritrovare la legge di Plank. Se infine le particelle sono indistinguibili e in più obbediscono al principio di Pauli (in una cella può stare una sola particella), le distribuzioni si riducono a 3: le *combinazioni semplici di 3 oggetti a 2 a 2*. Questa statistica fu ideata da Fermi e da lui applicata per studiare le proprietà del legame metallico. Dirac trovò poi il legame tra *spin* e statistica (i *bosoni* hanno spin itero, i *fermioni* spin semi-intero).

Esempi di distribuzioni statistiche

								tre stati 1°,2°,3°, due particelle a,b					
Maxwell-Boltzman													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1°	a b			a		a	b		b	(ba)			**In tutto 12 disposizioni x=g(g+n-1)!/g!**
2°		a b		b	a		a	b			(ba)		Considerando ininfluente lo scambio ab con ba
3°			a b		b	b		a	a			(ba)	le disposizioni si riducono a 9
													x=g^n
Bose - Einstein													Particelle indistinguibili
1°	a a			a		a							Fotoni, elioni,...
2°		a a		a	a								**x=(g+n-1)!/((g-1)!n!)**
3°			a a		a	a							
Fermi - Dirac													
1°	a		a										Particelle indistinguibili e principio di Pauli
2°	a	a											Elettroni, protoni, neutroni...
3°		a	a										**x=g!/((g-n)!n!)=C(g,n)**