Ottavio Serra

Principio di induzione . Coefficienti binomiali. Serie geometrica

a) Principio di induzione infinito-numerabile o principio di Peano. “Se la proprietà P è vera per $k\in \boldsymbol{N}$ e se, essendo vera per n, è vera per n+1, allora P è vera per ogni n>k. (k può essere zero).
$[P(k) \wedge P(n) \Rightarrow P(n+1)] \Rightarrow [(\forall n>k)\ P(n)]$.

Esempi.

1) Dimostrare che 1+2+…n $=\dfrac{n(n+1)}{2}$ **.**

2) $1^2+2^2+3^2+ \dots +n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) $1^3+2^3+3^3+ \dots +n^3 = (1+2+3+\dots +n)^2$.

4) *Ragionamento del tacchino*. Sembra che se al prodotto dei primi n numeri primi si sommi 1, si ottenga ancora un numero primo. Verificare che ciò è vero per n=1, n=2, n=3, n=4:
Per n=1, 2+1=3 primo;
per n=2, 2.3+1=6+1=7 primo;
per n=3, 2.3.5+1=30+1=31 primo;
per n=4, 2.3.5.7+1=210+1=211 primo.
Ce la sentiremmo di concludere che la proprietà è vera per ogni n? Il tacchino direbbe di sì; e voi? Se per n=4 fossimo giunti a una conclusione falsa, la proprietà sarebbe falsa, ma ora come facciamo? Non credo che qui si possa applicare il principio di Peano. Del resto ci sono proposizioni aritmetiche moòto semplici da enunciare, che a tutt’oggi sono indecise: (a) ogni numero pari è somma di due numeri primi?, (b) esistono infinite coppie di numeri primi *gemelli?*, esistono o non esistononumeri *perfetti* dispari?...

5) Il principio di induzione di Peano serve a confermare (o a refutare) una proprietà ipotizzata, ma non ci dice nulla sul modo di arrivare a quella proprietà. Una via per arrivare alla **1)** è la seguente:
S=1+ 2+ 3+… +(n-2)+(n-1)+n ; per la proprietà commutativa si può scrivere:
S=n+(n-1)+(n-2)+…+ 3+ 2+ 1 , per cui, sommando, 2S=(1+n).n , donde la tesi.
Verificare che la **2)** si ricava sommando i cubi di (0+1), (1+1), (2+1), (n+1) e utilizzando la **1).**
Analogamente la **3)** si ricava sommando le quarte potenze e utilizzando la **2)** e la **1)**.

6) Verificare o refutare la seguente formula: $1^4+2^4+\dots+n^4 = n^4.(n-1)+1$.

7) Calcolare i seguenti limiti per $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+...+n}{n^2},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n^3},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+...+n^3}{n^4}.$$

b) Calcolo combinatorio e coefficienti binomiali.

1) Disposizioni (semplici) di n oggetti di classe k (a *k* a *k*). $D_{n,k}$ = n(n-1).(n-2). … .(n-k+1), **k≤n.**
Disposizioni con ripetizione: $D^r_{n,k} = n^k$. **Questa volta k può superare n.**
Esempi: $D_{3,2}$ =3.2=6; infatti sia {a,b,c} l’insieme di 3 oggetti e prendiamoli a 2 a 2 : (a,b), (a,c), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b). Invece le disposizioni con ripetizione sono 3^2=9, perché, oltre alle precedenti, ci sono le disposizoni *ripetute* (a,a), (b,b), (c,c).
In generale, due disposizioni si considerano diverse se differiscono per l’ordie o per almenno un elemento.
Se k=n, le disposizioni semplici sono $D_{n,n}$=n.(n-1). … 2.1 =n! (Permutazioni di n oggetti).

2) Combinazioni semplici di n oggetti di classe k sono i sottoinsiemi di k oggetti ciascuno da un insieme di n oggetti. (l’ordine non conta). Permutando in ciascun sottoinsieme i k oggetti, si ottengono le disposizioni, perciò k!.$C_{n,k}$= $D_{n,k}$ da cui

[1] $C_{n,k} = \dfrac{D_{n,k}}{k!} = \dfrac{n!}{k!.(n-k)!}$. Si osservi la proprietà di simmetria $C_{n,k} = C_{n,n-k}$.

I coefficienti $C_{n,k}$ si indicano anche con $\binom{n}{k}$ e si chiamano coefficienti binomiali.

Combinazioni con ripetizione $C^r{}_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!.(n-1)!}$. (Dimostrarlo è complicato).

Applicazione allo sviluppo del binomio:
$(a+b)^n=(a+b).(a+b)\ldots.(a+b) = a^n+na^{n-1}b+n(n-1)/2.a^{n-2}b^2+\ldots +nab^{n-1}+b^n$.
I coefficienti numerici delle potenze di a e di b sono i coefficienti binomiali e, posto per comodità $\binom{n}{0}=1$, si ottiene [2] $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$.
Nota. Si pone 0! = 1; sapreste dire perché? Questa fa il paio con $a^0 =1$.

c) Progressione e serie geometrica.
Sia data la successione di numeri reali a_1, a_2, $\ldots a_k$, $a_{k+1, \ldots}$ a_n, con $a_{k+1} =q.a_k$. Segue che
[1] $\mathbf{a_n=a_1.q^{n-1}}$.

1) Verificare che, se $q\neq1$, posto $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ (***sommatoria***), risulta

[2], $S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$. (Fare S_n – $q.S_n$ e utilizzare la [1]. Somma di una progressione geometrica).

In particolare, se $|q|<1$,

[3] $\lim_{n\to\infty} S_n = S = a_1\frac{1}{1-q}$.

Per esempio, per q=1/2 (e a_1=1), $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 2$, per q=1/3, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{3}{2}$.

La [3] si può giustificare per via cinematica (si pensi ad Achille e alla tartaruga).

2) Si dimostra che, se $\alpha>1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ è convergente, cioè il suo limite è finito. Se $\alpha\leq1$, la serie diverge (a $+\infty$). (Si può dimostrare per confronto con un integrale improprio o in altri modi).
Verifichiamo ora in modo elementare che, se $\alpha=1$, la serie (detta armonica) diverge positivamente.
Infatti, 1+1/2+1/3+1/4+1/5+1/6+1/7+1/8+…=1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+1/8)+…poi si associno 8 addendi, poi 16, poi 32 e così via e si osservi che in ogni parentesi la somma degli addendi supera ½; perciò la somma della serie armonica supera la somma di infiniti addendi uguali a ½ ed è perciò infinita.