Ottavio Serra
Introduzione alla fisica quantistica
Cap 1
Le difficoltà della fisica classica.

La fisica classica, essenzialmente dovuta a Galileo e Newton per la meccanica, a Faraday e Maxwell per l'elettromagnetismo, negli ultimi decenni dell'800 veniva considerata una costruzione praticamente definitiva. Ricorda Plank che, avendo chiesto il parere del suo maestro Kirckoff sull'idea di scrivere la tesi di laurea sui principi della dinamica, si sentì rispondere che nel campo della meccanica non c'era più nulla di nuovo da dire, che si rivolgesse piuttosto alla termodinamica, la quale, per merito di Boltzman conosceva una nuova fioritura.

In realtà non era tutto pacifico. L'elettromagnetismo pareva richiedere un riferimento assoluto, ma gli esperimenti di Michelson e Morley davano risultato negativo per il moto della Terra rispetto a tale riferimento (dell'etere cosmico). Del resto ciò faceva a pugni col principio di relatività di Galilei.

Come è noto, il problema del moto fu risolto da Einstein in modo inaspettato introducendo un nuovo paradigma per la relazione tra spazio e tempo. Le distanze e le durate erano relative allo stato di moto del riferimento (da cui il nome di teoria della relatività), ma lo spazio e il tempo erano fusi in un nuovo assoluto a livello più profondo (e ciò non si sottolinea mai abbastanza).

La meccanica classica è però un'approssimazione tanto più precisa della meccanica relativistica quanto più sono piccole le velocità dei corpi rispetto alla velocità della luce.

Intanto nuove difficoltà stavano spuntando nella fisica classica.

Ne elencherò alcune.

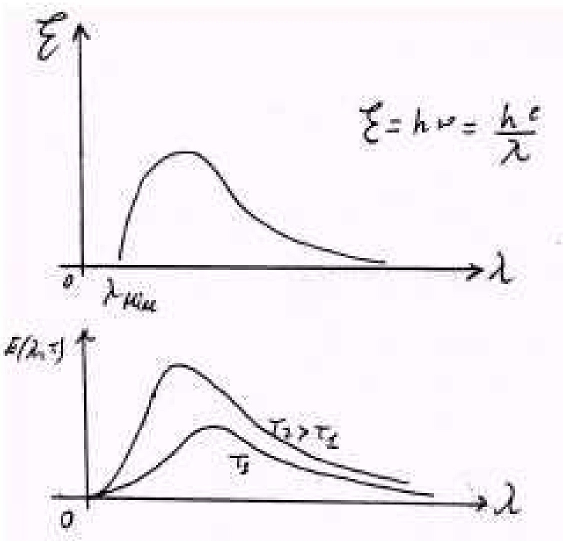
1) I corpi solidi incandescenti emettono luce (in generale radiazione elettromagnetica) in funzione della lunghezza d'onda e della temperatura in modo assolutamente diverso dalle previsioni fondate sull'elettromagnetismo classico e sulla termodinamica statistica di Boltzman. La soluzione di questo problema per opera di Plank nel 1902 aprì le porte alla prima teoria dei quanti.
2) I calori specifici dei solidi (monoatomici) obbediscono per la maggior parte delle sostanze alla semplice legge di Dulong e Petit che si ricava in modo elementare dal principio di equipartizione dell'energia di Boltzman. Se A è il peso atomico, c il calore specifico, cA=3R, essendo R la costante dei gas perfetti: cA= 6cal/(mole °K). Tuttavia sostanze di piccolo peso atomico come carbonio berillio, litio, hanno calori atomici nettamente minori (solo ad alte temperature si avvicinano a 6), e cosa ancora più grave, tutti i calori atomici tendono a 0, man mano che la temperatura scende verso lo zero assoluto. Il problema fu avviato a soluzione da Einstein usando la legge dell'irraggiamento termico di Plank e risolto dal fisico olandese Debye tenendo conto del reticolo cristallino che limita le frequenze di vibrazione possibili. Di un'altra difficoltà, come mai gli elettroni dell'atomo non contribuiscono con i loro gradi di libertà all'energia cinetica media e quindi al calore specifico, non parlerò; bisognò aspettare Fermi (1926) per capirlo.
3) L'effetto fotoelettrico è in un certo senso il processo inverso dell'emissione di raggi X. Se un metallo è colpito da un fascio di luce, emette elettroni; però succedono cose strane. La luce deve avere una frequenza maggiore di una frequenza minima detta frequenza di soglia, altrimenti non viene emesso nessun elettrone. A parità di frequenza, aumentando l'intensità luminosa aumenta il numero degli elettroni emessi, ma non la loro velocità. Per aumentare la loro velocità occorre aumentare la frequenza. L'emissione degli elettroni è praticamente istantanea rispetto all'arrivo sul metallo del fascio luminoso, anche se l'intensità è così piccola che, secondo l'ottica classica, dovrebbero passare alcune ore perché su un elettrone si accumuli l'energia necessaria a compiere il lavoro di estrazione. Il mistero dell'effetto fotoelettrico fu chiarito da Einstein nella prima delle tre famose memorie pubblicate a Berlino nella primavera del 1905. Ricordo che in questo lavoro Einstein afferma in modo netto che i quanti di energia di Plank hanno una effettiva realtà fisica: sono i quanti di luce in seguito detti fotoni. (Per inciso, è per questo lavoro che Einstein ebbe il premio Nobel nel 1922).

4) Gli atomi sono stabili, mentre secondo la meccanica classica e l'elettromagnetismo di Maxwell dovrebbero avere una vita estremamente breve. Si sa che se un satellite artificiale perde energia per una causa qualsiasi, per esempio per attrito con gli alti strati atmosferici, esso diventa sempre più veloce, la sua orbita si restringe e, incontrando strati d'aria sempre più densi, il processo si accelera e il satellite in poco tempo precipita sulla Terra o brucia nei densi strati atmosferici inferiori. *Il calcolo non è difficile. Vi propongo per esercizio di calcolare come, al diminuire dell'energia, diminuisca il raggio dell'orbita satellitare e aumenta la velocità del satellite.* Qualcosa del genere dovrebbe accadere a un atomo, per esempio all'atomo di idrogeno. Secondo il modello *planetario* di Rutherford, l'elettrone gira intorno al protone, nucleo dell'atomo di idrogeno, secondo un'orbita ellittica o circolare. In ogni caso il moto è accelerato, c'è l'accelerazione centripeta, e perciò l'elettrone dovrebbe irradiare onde elettromagnetiche. E' un fenomeno analogo a quello che accade in un'antenna radio: l'energia irradiata dall'antenna sotto forma di onde elettromagnetiche per il moto periodico degli elettroni nell'antenna stessa deve essere infatti compensata da quella fornita continuamente da un generatore, altrimenti l'antenna non funzionerebbe. Qualcosa di analogo dovrebbe accadere all'elettrone dell'atomo di idrogeno: non essendoci un apporto di energia dall'esterno, l'elettrone dovrebbe precipitare sul nucleo spiraleggiando con frequenza sempre più alta e si dovrebbero avere due conseguenze: 1°) l'atomo di idrogeno dovrebbe svanire nel giro di una diecina di nanosecondi ; 2°) dovrebbe emettere uno spettro continuo di radiazione elettromagnetica troncato bruscamente verso le alte frequenze con la morte dell'atomo. Sorte analoga dovrebbero avere tutti gli altri atomi, con la conseguenza chiaramente falsa che gli atomi (e noi stessi) non esistono. Invece gli atomi esistono, sono stabili e quando sono eccitati, per esempio da una scarica elettrica, emettono uno spettro di **righe**, stabile e caratteristico della specie atomica come un'impronta digitale o il DNA di un essere vivente. Il problema dello spettro di righe fu avviato a soluzione da Bohr nel 1913; la stabilità degli atomi e la teoria generale degli spettri dovrà aspettare la nascita della meccanica quantistica. [1]

[1] Samuel Tolansky, "Introduzione alla fisica atomica", Einaudi, Torino 1950

Cap. 2
Potere emissivo del corpo nero

Ogni corpo, che non sia allo zero assoluto, emette energia sotto forma di radiazione elettromagnetica. Se la temperatura supera i 500 °C, la radiazione comincia a essere visibile dall'occhio umano, sotto forma di luce rossa, che diventa poi gialla, bianca, azzurra man mano che la temperatura cresce. Esaminati allo spettroscopio, mentre i gas rarefatti emettono luce sotto forma di uno spettro discreto (spettro a righe) caratteristico per ogni specie atomica, i corpi condensati, liquidi o solidi, emettono uno spettro continuo, dall'infrarosso al visibile (rosso - violetto), all'ultravioletto. Non bisogna credere che un corpo emetta luce solo per agitazione termica. Un metallo bombardato con elettroni veloci emette uno spettro continuo (di raggi X) che ha un profilo di intensità spettrale diverso dalla radiazione termica; in particolare, lo spettro ha un taglio netto in corrispondenza di una lunghezza d'onda minima corrispondente alla massima energia degli elettroni proiettili. (Vedi il primo disegno sottostante). Il secondo disegno dà l'andamento sperimentale dell'emissione termica di un corpo nero a due temperature diverse secondo i fisici tedeschi Lummer e Pringsheim, verso la fine dell'800.



I fisici di fine '800 affrontarono il problema di trovare la legge matematica di tale radiazione, utilizzando la fisica classica: meccanica, elettromagnetismo e termodinamica , ma senza successo. Secondo la meccanica statistica di Maxwell e Boltzman, il numero dei gradi di libertà (oscillatori lineari) contenuti nell'unità di volume nella banda di frequenza [ν , ν+dν] è $dN = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 d\nu$.

Perciò la densità dell'energia di radiazione in equilibrio termico dentro una cavità è

$$u(\nu,T) = \frac{dU}{d\nu} = dN\overline{\varepsilon} / d\nu = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2\overline{\varepsilon}$$

essendo $\overline{\varepsilon}$ l'energia media di un oscillatore lineare.

I fisici inglesi Rayleigh e Jeans usarono per questa energia media il risultato classico kT , essendo k la costante di Boltzman, k=R/N, perciò si ottiene

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kT[J/m^3.Hz].$$

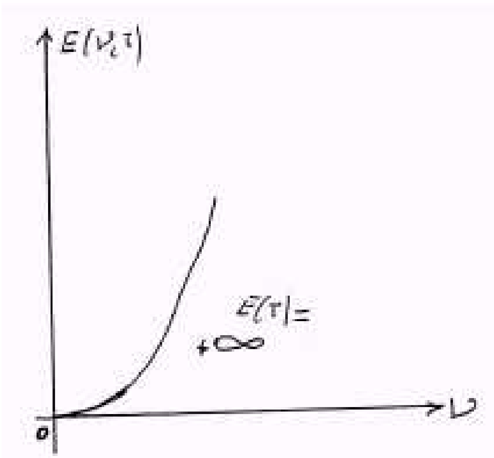
Perciò la densità integrale (su tutte le frequenze) è infinita!
Ciò che si determina più facilmente è il potere emissivo di un corpo, cioè l'energia emessa in un secondo dall'unità di superficie in tutte le direzioni, nella banda di frequenza di 1 Hz:

$$e(corpo,\nu,T)=\frac{dW}{dt.dS.d\nu}[J/s.m^2.Hz].$$

Accanto al potere emissivo va considerato il potere assorbente di un corpo, che è la percentuale di energia assorbita su quella incidente . Anche il potere assorbente dipende dal corpo, oltre che dalla frequenza e dalla temperatura, ma il rapporto, come dimostrò Kirckoff per via termodinamica, è indipendente dal corpo, $E(\nu,T)=\dfrac{e(corpo,\nu,T)}{a(corpo,\nu,T)}$ ed è detto potere emissivo del corpo nero, perché si riduce ad e per a=1 (corpo nero).
Il legame tra potere emissivo del corpo nero e densità dell'energia in equilibrio termico è il seguente: $E(\nu,T)=c/4.u(\nu,T)$, pertanto

[1] $$E(\nu,T)=\frac{2\pi}{c^2}\nu^2kT.$$

Ma questa legge è disastrosamente errata, perché, integrando su tutte le frequenze, si avrebbe potere emissivo infinito o, se volete, densità di energia infinita, il ché è assurdo. (Vedi figura sottostane).



Finalmente nel 1902 Max Plank risolse il mistero, immaginando l'emissione di radiazione non come un processo continuo, ma discreto; il corpo emetterebbe l'energia raggiante in pacchetti non divisibili, detti appunto **quanti** (quantità discrete).
Plank, servendosi anche di un famoso risultato di Wien, ottenuto per via termodinamica, cioè che $E(\nu,T)=\nu^3 f(\nu/T)$, dove però f è una funzione che la fisica classica non è in grado di determinare, fece l'ipotesi che l'energia fosse emessa per pacchetti non frazionabili, detti *quanti*, Con ciò ottenne che l'energia media di un oscillatore lineare non è kT, bensì

$$\frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}}-1}$$

essendo ε_0 l'energia del quanto. Segue che il potere emissivo è

$$E(\nu,T)=\frac{2\pi}{c^2}\nu^2\frac{\varepsilon_0}{e^{\frac{\varepsilon_0}{kT}}-1}$$

Dovendo però la formula rispettare il risultato di Wien, deve essere $\varepsilon_0 = h\nu$ e infine

[2] $$E(\nu,T)=\frac{2\pi}{c^2}\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

dove h è una nuova costante universale, avente la dimensione di un'azione (energia x tempo), ora detta costante di Plank. La [2], mediante due misure di E a due assegnate frequenze, nota la temperatura, consente di determinare le due costanti (c è nota: 3.10^8 m/s) h e k :

$$h=6,626.10^{-34}J.s, k=1.38.10^{-23}J/°K$$

Siccome per la radiazione dall'infrarosso ali raggi X è più agevole misurare lunghezze d'onda che non frequenze, la [2] si scrive, ricordando che $\nu=c/\lambda$ e che di conseguenza $d\nu=\frac{-c}{\lambda^2}d\lambda$,

[3] $$E(\lambda,T)=\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 e^{\frac{hc}{k\lambda T}}-1}$$

Derivando la [3] rispetto a λ si ottiene la legge dello spostamento dio Wien: il prodotto tra la temperatura della sorgente e la lunghezza d'onda di massimo potere emissivo è una costante che vale circa 0,29 cm.°K: $\frac{hc}{k\lambda T}=x$, dove x, soluzione dell'equazione $5-5e^{-x}-x=0$, vale 4,96 perciò $\lambda T = hc/k.4,96 = 0,29$ cm.°K.
Per esempio, lo spettro della fotosfera solare ha il massimo a 4800 A°, perciò risulta T=6000 °K.
Si noti che 4800 A° cade nel giallo verde in cui l'occhio umano ha il massimo di sensibilità. E' un caso?
Si sarebbe potuto derivare la [2] rispetto a ν. Si trova che il rapporto tra la frequenza di massimo poter emissivo e la temperatura è $\frac{\nu}{T}=2,83\frac{k}{h}=5,89.10^{10}$ e il massimo potere emissivo, nel caso del Sole, cade a una frequenza corrispondente alla riga di 8500 A°, cioè nell'infrarosso. Ciò dipende dal fatto che la [2], come la [3] è una funzione densità (che dà la densità di probabilità di emissione dei fotoni di data energia, se la si divide per il fattore di *normalizzazione* E(T), cioè per il potere emissivo integrale su tutte le frequenze). Ma la banda di frequenza di 1 Hz, non ha niente a che vedere con la banda unitaria in lunghezza d'onda (1cm, 1 metro, 1 A° ?). Però il fatto fisico che la temperatura del Sole è 6000 °K è ricavabile ugualmente dall'una o dall'altra formula.
Se poi integriamo la [2] su tutte le frequenze o la [3] su tutte le lunghezze d'onda, otteniamo la legge di Stefan Boltzman : il potere emissivo integrale risulta proporzionale alla quarta potenza della temperatura assoluta:

$E(T)=\sigma T^4$, dove $\sigma=5,65.10^{-8}\frac{watt}{m^2 °K}$.

Il valore di σ era stato trovato sperimentalmente da Stefan e dall'italiano Bartoli; Boltzman aveva giustificato termodinamicamente la proporzionalità di E alla quarta potenza di T, ma la legge di Plank consente di ricavare σ dalla conoscenza delle costanti universali h e k.

Esercizio.

Determinare il potere emissivo integrale e l'energia totale irradiata dal Sole in un secondo, conoscendo:

a) la costante solare di 2 calorie /(minuto .cm^2) cioè l'energia che cade in un minuto su un centimetro quadrato della superficie terrestre, corretta dell'assorbimento atmosferico;
b) la distanza Terra _ Sole di 150 milioni di Km;
c) il raggio del Sole di 670 mila Km.

Dal potere emissivo integrale e dalla legge di Stefan Boltzman dedurre la temperatura della superficie del Sole; dalla potenza totale irradiata, dedurre la massa perduta ogni secondo dal Sole.
Se, con gli astronomi, ammettiamo che il Sole abbia ancora una *vita* di 5 miliardi di anni, quanta massa avrà perduto il Sole da oggi a quella data?

Siccome la massa odierna del Sole è di $2.10^{30}\,Kg$, quale percentuale di questa massa avrà perduto tra 5 miliardi di anni?

Quesito. Le curve seguenti riguardano l'emissione di corpo nero. In ciascuno dei tre disegni c'è un errore: individuarlo.