Ottavio Serra
Elementi di fisica relativistica
(Relatività ristretta).

1) Il tetto delle velocità in natura.

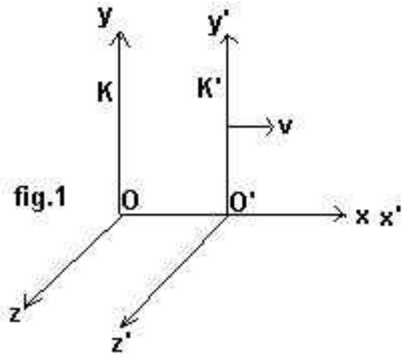
Sembra fantastico che in natura ci possa essere qualche agente fisico (che produce effetti fisici) il quale si propaghi con velocità infinità. E' molto più ragionevole pensare che ci sia un tetto, un limite superiore, alle velocità naturali. Se una tale velocità massima finita esiste, diciamo c, essa non può sommarsi con la velocità del sistema di riferimento, altrimenti, detta v la velocità del riferimento in cui si misura c rispetto a un secondo riferimento, rispetto a questo il segnale andrebbe a velocità v+c > c, secondo la cinematica di Galilei e dunque o l'estremo superiore delle velocità in natura è $+\infty$ o non vale la cinematica di Galilei.

2) Trasformazione delle coordinate nella cinematica galileiana.

<u>Relatività galileiana.</u>

Siano K e K' due sistemi di riferimento inerziali in moto relativo traslatorio uniforme con velocità v, per esempio, in prima approssimazione , la crosta terrestre e un treno in corsa. Orientiamo gli assi di K' in modo che l'asse x' di K' scorra lungo l'asse x di K parallelamente a v, y' e z' siano paralleli a y e a z.

fig.1



Risulta, posto il tempo t=0 quando O' transita per O, $x' = x - OO' = x - vt$,
mentre y' = y e z' = z.
Si ottiene la trasformazione di Galileo

[1] TG: $x' = x - vt$, $y' = y$, $z' = z$

Si noti che è sottintesa una quarta equazione. **t' = t** (il tempo è assoluto).
Il principio di relatività consente di ricavare le grandezze non accentate (le coordinate in K) da quelle in K' semplicemente scambiando le lettere accentate con le non accentate e v con -v, come del resto è immediato algebricamente.

Dalle [1] segue che, detta **u**=(u_x, u_y, u_z) la velocità di una particella in K, **u'**=(u'_x, u'_y, u'_z) in K', risulta

[2] $u'_x = u_x - v, u'_y = u_y, u'_z = u_z$,

che è la ben nota regola di addizione delle velocità.
Passando alle accelerazioni, essendo v costante, risulta **a' = a**, l'accelerazione è indipendente dal moto del riferimento. Segue che anche la forza agente su una particella è invariante:

F = m**a** = m**a' = F'.**

Si conclude che la meccanica di Newton e' invariante per trasformazioni galileiane.

Esercizio Un motoscafo ha velocità c in acqua ferma; esso si muove su un fiume la cui corrente rispetto alle sponde è v. Detta L la larghezza del fiume, calcolare il tempo t1 di andata e ritorno per attraversare il fiume perpendicolarmente alle sponde e il tempo t2 di andata e ritorno per percorrere un tratto L parallelamente alla corrente. Si trova

$$t_1 = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, t_2 = \frac{t_0}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

essendo $t_0 = \frac{2L}{c}$ il tempo impiegato dal motoscafo in acqua ferma. Dunque i due tempi, t_1 e t_2 sono diversi.

Se però invece del motoscafo consideriamo un raggio di luce emesso da una sorgente che si muove con velocità v rispetto alla Terra, si trova che i tempi impiegati per percorrere un tratto L parallelamente o perpendicolarmente alla velocità v sono uguali; la velocità della luce non si somma con la velocità della sorgente o del riferimento. Dagli esperimenti di Michelson e Morley[1] e dalle osservazioni astronomiche di De Sitter, risulta che la velocità della luce è un assoluto, è indipendente dal riferimento, come del resto si deduce dalle equazioni elettrodinamiche di Maxwell $v_{Luce} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ (nel vuoto). Il contrasto con la [2] dice che la TG, la trasformazione di Galileo, cade in difetto alle alte velocità, e quindi è da correggere anche la meccanica di Newton, che è consistente con la TG.

3) Cinematica relativistica. Velocità limite. La meccanica di Newton non pone un massimo alle velocità in natura e da ciò segue che si possa parlare di un tempo assoluto, cioè che scorra ugualmente in tutti i riferimenti e per tutti gli osservatori. In particolare, è assoluta la simultaneità, anche di eventi spazialmente separati.

Ma una velocità infinita è chiaramente fantastica; è più ragionevole ipotizzare l'esistenza di una velocità massima finita per gli agenti fisici, diciamo c. Ma allora la TG cade in difetto, perché se ho c in K', in K avrò c+v, maggiore di c. Dunque, se esiste una velocità massima finita c, questa non si somma con la velocità della sorgente o del riferimento. D'altra parte, per una nota proprietà matematica, il massimo, se esiste, è unico. E' siccome gli esperimenti di Michelson e Morley e le osservazioni astronomiche di De Sitter e altri ci dicono che la velocità delle onde elettromagnetiche (della luce) non si somma con la velocità del riferimento o della sorgente, la velocità massima e limite va identificata con la velocità della luce.

Segue che la composizione delle velocità non può essere quella derivata dalla TG (Trasformazione di Galilei).

Un'altra conseguenza apparentemente paradossale è la non assolutezza della contemporaneità di due eventi.

Per poter quantificare queste affermazioni dobbiamo capire come cambia lo scorrere del tempo passando da un sistema di riferimenti a un altro in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto al primo.

I due principi sui quali Einstein basa la teoria della relatività ristretta sono:

1) Due sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti per la descrizione dei fenomeni fisici.

2) Esiste una velocità limite che è la stessa in ogni sistema inerziale e questa è la velocità della luce (nel vuoto).

Vediamo ora come si misura un intervallo di tempo in un riferimento K' e in un riferimento K rispetto al quale K' si muova con velocità vettoriale costante **v** (vedi fig. 1)

Premetto che le misure di lunghezza non sono alterate in direzione perpendicolare a **v**. Infatti, se un'asta lunga un metro lungo l'asse y' lasciasse su y un segno più corto di un metro, la stessa asta ferma in K dovrebbe lasciare su y' un segno più lungo e insieme, per il principio di relatività, più corto e questa è una contraddizione.

[1] Resnick, "Introduzione alla relatività ristretta", Casa Editrice Ambrosiana, Milano 1969. Vedi anche i miei articoli nel sito digilander.libero.it/ottavioserra0 o nell'annuario dello "Scorza"

Considero ora in K' un tratto lungo h parallelo all'asse y'. La luce, per percorrerlo in andata e ritorno impiega un tempo $\Delta t' = 2h/c$. In K, perché il raggio di luce parta dalla sorgente, si rifletta a quota h su uno specchio e ritorni alla sorgente, impiegherà un intervallo di tempo Δt. Siccome K' si muove rispetto a K con velocità v (vedi fig. 1), mentre il raggio di luce sale e poi scende, K' avanza lungo l'asse x di un tratto $v.\Delta t$, e perciò $\Delta t = \dfrac{AB + BA'}{c} = \dfrac{2AB}{c} = \dfrac{2}{c}\sqrt{h^2 + (\dfrac{v.\Delta t}{2})^2} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$.

(vedi fig. 2).

$\Delta t'$ viene detto tempo proprio, perché gli eventi iniziale e finale (partenza e ritorno del segnale) avvengono nello stesso luogo. Si noti che il tempo proprio $\Delta t'$ è minore della durata dello stesso processo osservato da un riferimento in cui gli eventi iniziale e finale del processo accadono in luoghi aventi ascissa diversa.

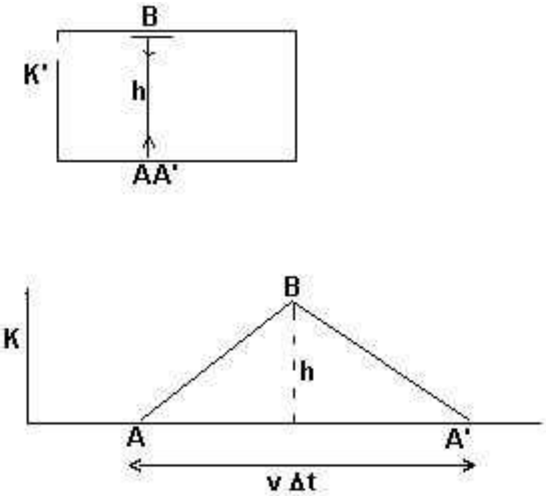


fig. 2

3) La trasformazione di Lorenz TL.

Troviamo ora la trasformazione compatibile con i principi della relatività che dovrà sostituire quella di Galileo.

Assumendo che in K' e K si abbia t' = t = 0 quando le origini delle coordinate coincidono, la trasformazione deve essere omogenea. Inoltre deve essere lineare per il principio di relatività: un moto rettilineo uniforme in K deve essere rettilineo e uniforme in K'. Si trova[2]:

[3] **TL**

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, y' = y, z' = z, t' = \frac{t - \dfrac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

N.B. Scambiando v con -v e le lettere accentate con le non accentate, si ottiene la **TL inversa**. Naturalmente, tale inversa si può ottenere anche risolvendo rispetto a x,y,z,t il sistema [3]

Si noti che se $c \to \infty$, la TL si riduce alla TG.

Vediamo ora come si trova la composizione delle velocità che sostituirà la composizione galileiana del parallelogrammo.

[2] Per i dettagli vedi nota 1.

Composizione delle velocità.

[4] $$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'} = \frac{u'_x + v}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}$$ e analogamente

$$u_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\dfrac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}} = \frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}u'_x} \qquad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c^2}u'_x}$$

Consideriamo i seguenti esempi:

a) Due eventi che accadono nello stesso posto di un riferimento K' in istanti diversi, accadono in posti diversi nel riferimento K. Se, per esempio, K' è un treno in corsa e gli eventi sono l'inizio e la fine di una telefonata di un passeggero, i due eventi accadono nello stesso posto del treno, ma in posti diversi della crosta terrestre (di K). Di ciò nessuno si meraviglia.

b) Due eventi che accadono nello stesso istante in posti diversi di K', non sono più simultanei in K. I due eventi potrebbero essere due lampadine che si accendono contemporaneamente agli estremi del corridoio di una carrozza. Questa affermazione ci lascia stupefatti. Il passeggero posto a metà del corridoio vede le due lampadine accendersi nello stesso istante e conclude correttamente per la simultaneità dei due eventi. Un cantoniere posto sulla massicciata in corrispondenza del passeggero quando questi vede i due lampi di luce, riceve prima il lampo della lampadina posta in coda al corridoio e poi quello della lampadina di testa. Egli conclude correttamente che i due eventi non sono simultanei. Lo stupore di questa conclusione è dovuto al fatto che noi ci scambiamo informazioni mandandoci segnali e che i segnali più veloci che abbiamo a disposizione sono segnali luminosi, in generale segnali elettromagnetici. La luce è così rapida nell'esperienza quotidiana che noi consideriamo infinita la sua velocità, il ritardo si nota solo su distanze astronomicamente grandi. Ben diverso è il caso del suono (in aria); quando vediamo il fulmine, ci aspettiamo un ritardo per il tuono. Se guardiamo l'orologio di un campanile lontano e leggiamo l'ora, noi regoliamo il nostro orologio fermo su quell'ora, ma se l'informazione sull'ora ci è comunicata da una staffetta, noi correggiamo l'informazione col ritardo che presumibilmente ha accumulato la staffetta per raggiungerci.

   Quantifichiamo ora gli esempi precedenti a) e b) .

   a) Se la telefonata è durata 5 minuti e il treno va a 20 metri al secondo, mentre per il passeggero l'inizio e la fine della telefonata sono avvenuti nello stesso posto, rispetto al riferimento terrestre sono avvenuti a 6 chilometri di distanza. Ho usato calcoli non relativistici, perché una velocità di 20 m/s è molto piccola.

   b) Se la velocità del treno è sempre di 20 metri al secondo e la carrozza è lunga 40 metri, i due eventi, simultanei nel treno, non lo sono più nel riferimento terrestre. Ma la differenza di tempo è estremamente piccola. Si ha infatti:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{0+\frac{20}{9.10^{16}}40}{\sqrt{1-\frac{400}{9.10^{16}}}} \cong \frac{8}{9}.10^{-14}$$

all'incirca un centomillesimo di nano-secondo.

Ben diversamente vanno le cose per particelle sub atomiche che viaggiano a velocità prossime a quella della luce.

Per esempio, un pione è instabile e decade (se negativo, in un muone negativo e un antineutrino muonico) con una ***emi-vita*** $\tau_{1/2} = 1{,}8.10^{-8}$ **secondi** quando è allo stato di quiete (state quieti, se potete). Se un fascio di pioni viaggia alla velocità v = 0,99c, esso percorre circa 38 metri prima che l'intensità del fascio si dimezzi, mentre classicamente dovrebbe percorrere solo un tratto vτ =5,35 metri. Questa discrepanza apparente si spiega col fatto che τ è la vita media propria, cioè la vita media in un riferimento in cui il pione è in quiete. Nel laboratorio la vita media è $t = \tau / \sqrt{1-0{,}99^2} = 12{,}76.10^{-8}$ s e perciò lo spazio percorso nel laboratorio è 12,76. 2,97 = 38 metri circa, in buon accordo con la distanza misurata.

Si osservi che nel riferimento del pione, i 38 metri del laboratorio misurano 38.0,141=5,358 metri e dividendo per v si ritrova con buona precisione la vita media di quiete.[3]

Per ulteriori studi di cinematica relativistica, in particolare per l'aberrazione astronomica e gli effetti Doppler longitudinale e trasversale, vedi i testi citati in nota [1] e [2]. E' notevole che, mentre l'aberrazione astronomica e l'effetto Doppler longitudinale erano noti e giustificati approssimativamente in cinematica classica, l'effetto Doppler trasversale era sfuggito all'indagine sperimentale perché troppo piccolo e fu osservato la prima volta da Ives e Stilwell nel 1938. Il risultato è $f = f'\sqrt{1-v^2/c^2}$ ed è una conseguenza diretta della dilatazione del tempo. L'effetto Doppler longitudinale, nella sua approssimazione non relativistica, era da tempo usato per misurare la velocità radiale delle stelle. L'astronomo americano Edwin Hubble trovò così alla fine degli anni '20 del XX° secolo il red shift delle galassie lontane e l'espansione dell'universo.

4) Dinamica relativistica.

Per brevità ci limiteremo allo studio dell'impulso (quantità di moto) e dell'energia.

Come in meccanica classica, ipotizziamo la legge di conservazione della quantità di moto. Questa legge in meccanica classica è equivalente al principio di azione e reazione, che ora non è sostenibile, in quanto implica che la forza agisca istantaneamente a distanza. Invece la conservazione della quantità di moto, per un sistema isolato, discende da un principio generale di simmetria, l'omogeneità dello spazio, che dovrebbe valere anche in meccanica relativistica. Esso afferma in sostanza che in un riferimento inerziale tutti i punti dello spazio sono equivalenti per la descrizione dei fenomeni meccanici. Noi lo ammetteremo senza dimostrazione, perché questa non è semplice.

Si trova allora che la quantità di moto non è più p = m.v, bensì

$$p = \gamma m v, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Per una dimostrazione si veda [3].

E' interessante notare che, mentre nella meccanica di Newton $p = m\frac{dx}{dt}$, ora $p = m\frac{dx}{d\tau}$, essendo τ il tempo proprio. In generale **p** è un vettore e x va sostituito col vettore **r** =(x,y,z).

[3] Vedi R. Resnick, "Introduzione alla relatività ristretta, Casa Editrice Ambrosiana, Milano 1969

A volte si pone M(v)=m.γ. M(v), dipendente dalla velocità, si chiama massa relativistica, ma è meglio non parlarne, per evitare equivoci. Si veda Elio Fabbri in nota [4].

Per l'energia cinetica si trova il seguente risultato: $K = m.c^2(\gamma - 1)$.

Per chi conosce il calcolo integrale, la formula si dimostra come segue.

Per la seconda legge di Newton, F = m.a, essendo a=dv/dt, perciò $F = m\dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d(mv)}{dt} \equiv \dfrac{dp}{dt}$, perché m è costante. (Siamo in fisica classica).

Se ora sostituiamo m con M = M(v) avremo: $F = \dfrac{d(Mv)}{dt} = M\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{dM}{dt}$, da cui segue

$$K = \int_0^v F.dx = \int_0^v Mv.dv + v^2.dM\,.$$

Inoltre, da $M = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, si ha: $M^2c^2 - M^2v^2 = m^2c^2$, da cui differenziando e dividendo per 2M si ottiene $c^2dM - v^2dM - M.v.dv = 0$ e infine

$$K = \int_0^v c^2dM = c^2M(v) - c^2M(0) = c^2(M - m) = (\gamma - 1).mc^2.$$

L'approssimazione non relativistica.

Se v è molto piccola rispetto a c, γ tende a 1 e p=γ.mv tende alla quantità di moto classica mv.

La stessa drastica approssimazione non si può fare per l'energia cinetica. Si osservi però che

$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cong \dfrac{1}{1 - \dfrac{v^2}{2c^2}} \cong 1 + \dfrac{v^2}{2c^2}$ e pertanto $K = \dfrac{1}{2}m.v^2$, che è la formula classica.

Un'osservazione estremamente importante è la seguente. Se invece di K consideriamo la grandezza $E = \gamma mc^2$, E appare la somma dell'energia di moto K e del termine mc^2 , detto energia di quiete.

Ma c'è di più. Come l'intervallo spazio-temporale $ds = \sqrt{(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2} = d\tau$ è un invariante relativistico perché rappresenta il tempo proprio, anche

[5] $(E)^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2$

è un invariante, perché m e c sono invarianti.

Dalla [5] segue intanto che in meccanica relativistica, se p si conserva, anche E (energia totale relativistica) si conserva, a differenza della meccanica classica in cui si può avere conservazione della quantità di moto e non dell'energia, come in un urto anelastico. In un urto anelastico si sviluppa energia di quiete, che compensa la diminuzione dell'energia di moto K.

Si noti ancora che, essendo $E = \gamma mc^2, p = \gamma mv$ segue

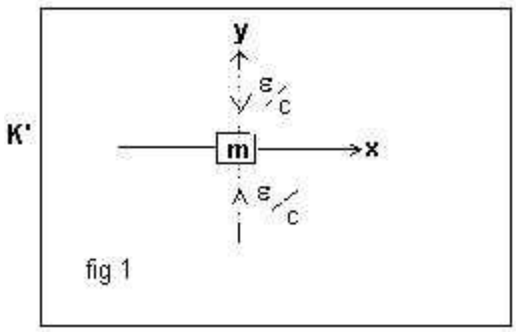
[6] $$\frac{E}{p} = \frac{c^2}{v}.$$

In particolare per i fotoni, essendo v = c, si ricava che E=pc e dalla [1] m=0. Vale anche il viceversa: se m=0, allora E = pc e v=c. Cioè, **una particella va alla velocità della luce se e solo se la sua massa è zero.**

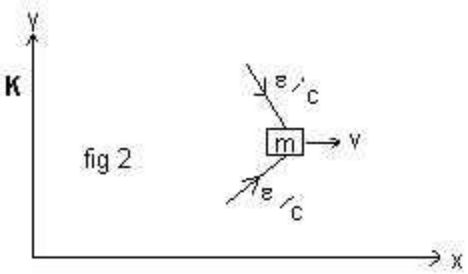
Si intende la massa di quiete, quella che intendono i fisici parlando di massa di una particella, quella che per i corpi macroscopici si misura con la bilancia, dopo aver portato il corpo in quiete nel sistema del laboratorio. E' chiaro che per particelle che decadono in tempi estremamente brevi, come per esempio i pioni, la massa (di quiete, altrimenti le misure non sarebbero confrontabili con quelle

realizzate da altri) si misura tramite la [5], dopo aver determinato p ed E con tecniche di fisica nucleare.
E' interessante osservare che , come p=mdx/dt, (a rigore la componente x di p), analogamente E/c=mcdt/dτ, ponendo in luce l'analogia tra coordinate spaziali e tempo da una parte, componenti della quantità di moto ed energia dall'altra.
Concludendo, **se su una particella si compie lavoro applicando una forza che porta la sua velocità da zero a v, <u>ma non modifica la sua massa,</u> l'energia totale della particella, cioè quella cinetica più quella di quiete, sarà** $E = \gamma mc^2$ **.**
Consideriamo ora l'inerzia dell'energia**. Einstein si chiede: l'inerzia di un corpo, cioè la sua massa (di quiete) dipende dal suo contenuto di energia?** Vediamo che la risposta è positiva.

Immaginiamo che su un corpo di massa m, in quiete in un riferimento K', arrivino lungo l'asse y e con verso opposto, due quanti di luce, ciascuno di energia ε' e impulso ε'/c. L'impulso del corpo è



zero prima e dopo l'assorbimento. Vedi fig 1.
Osserviamo ora il processo da un riferimento K rispetto al quale K' si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v lungo l'asse x. Vedi fig 2



I fotoni si muovono obliquamente con energia ε e quantità di moto ε/c, formando con l'asse y un angolo α tale che sen(α) = v/c.
Siccome in K' la quantità di moto si conserva (è zero prima e dopo l'assorbimento), per il principio di relatività si deve conservare anche in K. Però c'è un fatto. Siccome la velocità di m è quella v del riferimento K' rispetto a K, prima dell'assorbimento era $\gamma mv + 2\frac{\varepsilon}{c} sen(\alpha) = \gamma mv + 2\frac{\varepsilon v}{c^2}$
e dopo sarà γmv. Dobbiamo pensare perciò che dopo l'assorbimento la massa (di quiete!) sarà m'.
Pertanto $m' = m + \frac{2\varepsilon}{\gamma c^2}$.

Vediamo che succede per l'energia. Prima dell'assorbimento era $\gamma mc^2 + 2\varepsilon$, dopo sarà $\gamma m'c^2$ e siccome l'energia si deve conservare, si dovrà avere

$$\gamma mc^2 + 2\varepsilon = \gamma m'c^2 .$$

Da qui ricaviamo $m' = m + \frac{2\varepsilon}{\gamma c^2} = m + \frac{\Delta E}{\gamma c^2}$, da cui infine $\Delta E = \gamma c^2 \Delta m.$ Si ottiene in definitiva

$$E = \gamma mc^2$$

a meno di una costante che si pone uguale a zero, perché quando il corpo è fermo vogliamo che sia $E = mc^2$.

La conclusione è che una stessa legge, $E = \gamma mc^2$, dà l'energia di un corpo quando, applicando una forza, se ne modifica la velocità senza modificarne la massa e quando, senza alterare la velocità, se ne modifica la massa fornendogli o sottraendogli energia sotto forma di radiazione. Ma siccome ogni forma di energia assorbita finisce per dare sviluppo di calore, alla fine non resta traccia della radiazione e dunque il risultato ottenuto è generale.[4]

(Questa lezione è una sintesi del mio articolo; "Teoria della relatività" pubblicato sull'Annuario dello Scorza e che presenta pure un cenno sulla relatività generale, con delle appendici sul "paradosso dei gemelli", su "moto iperbolico" e su "inversione temporale e causalità". L'articolo, oltre che sull'Annuario, si trova nel mio sito ***http://*****digilander.libero.it/ottavioserra0** *nella cartella Articoli, Annuario del Liceo Scientifico Scorza. Si veda anche nella stessa cartella i lavori sulla relatività pubblicati sul "Foglio" del Liceo Classico "Garibaldi"* di Castrovillari).

[4] Vedi Elio Fabbri, "Per un insegnamento moderno della relatività, A.I.F., Pisa 1989