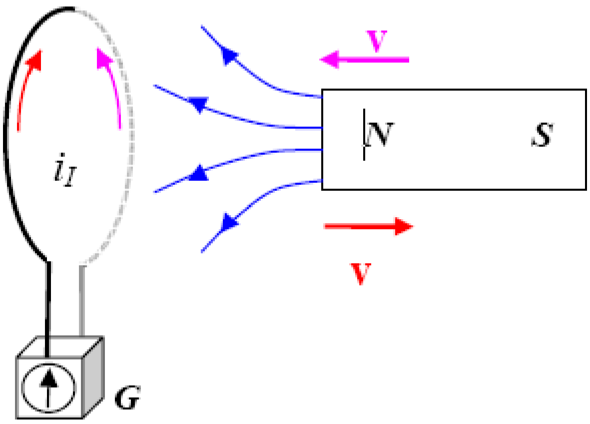
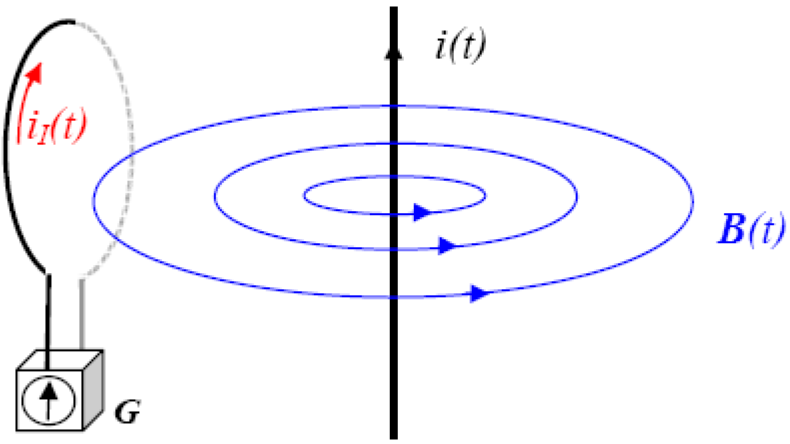
Ottavio Serra

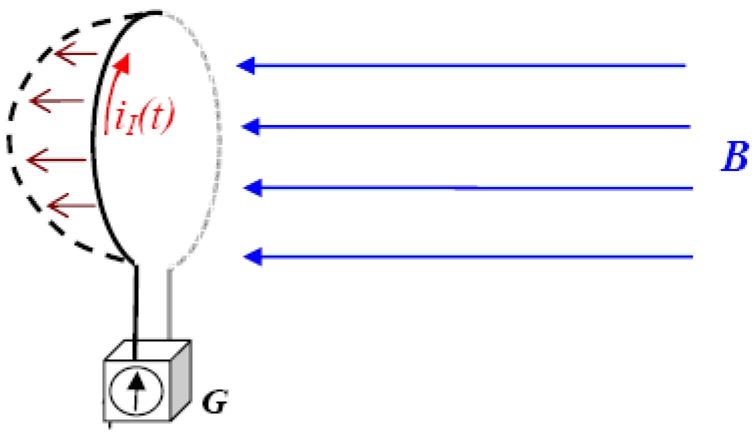
Induzione elettromagnetica - Equazioni di Maxwell

Una corrente elettrica, una carica in moto, un campo elettrico variabile producono un campo magnetico.

Analogamente, un campo magnetico variabile nel tempo produce un campo elettrico (elettromotore: non conservativo)





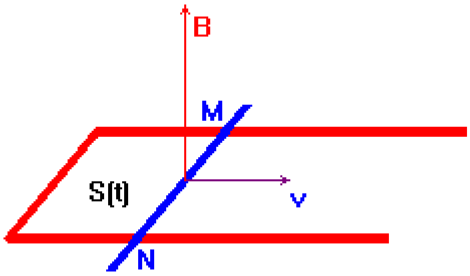


La corrente indotta si ottiene muovendo il magnete, oppure variando la corrente I(t) nel circuito inducente oppure deformando il circuito indotto immerso in un campo magnetico costante nel temo. In ogni caso si richiede che il campo magnetico "concatenato con il circuito indotto vari nel tempo.

Si ha f.e.m. indotta ϵ_i nel secondario tutte le volte che varia il flusso magnetico concatenato col circuito, calcolato attraverso una qualsiasi superficie S avente il circuito come bordo.

$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

La f.e.m indotta $\boldsymbol{\epsilon_i = - d\Phi_B/dt}$ (legge di Faraday – Neuman). Il segno *meno* (legge di Lenz) significa che la f.e.m indotta si oppone alla variazione di flusso magnetico che la genera.
Una dimostrazione elementare della legge di Faraday si ottiene come segue (vedi fig. sottostante)



Se un'asta metallica si muove con velocità **v** lungo la guida metallica rossa in un campo magnetico uniforme **B**, la forza di Lorenz **F** = (-e)**v** x **B** spinge gli elettroni verso M, perciò si stabilisce una differenza di potenziale $V_N - V_M = \vec{MN}.\vec{E} = MN\frac{(-e)vB}{(-e)} = MN.vB$. Ma $MN.v = MN\frac{dx}{dt} = \frac{dS(t)}{dt}$,

perciò $V_N - V_M = \boldsymbol{\epsilon_i} = B\frac{dS(t)}{dt} = \frac{d\Phi(t)}{dt}$, alla quale va aggiunto il segno *meno* della legge di Lenz.

Induttanza. Il flusso magnetico in una bobina è $\Phi = NSB = NS\mu(N/l)i = Li$, avendo posto $L = \mu\frac{N^2S}{l}$.

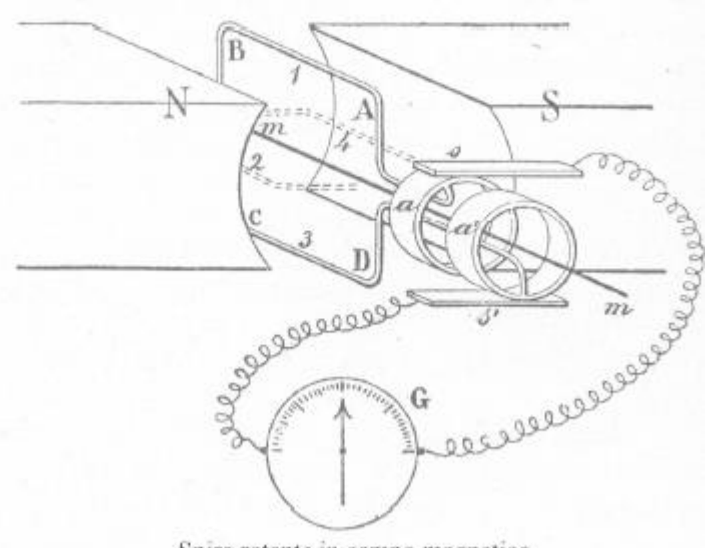
L si chiama induttanza e si misura in H (Henry) = Ωs. Anche il circuito più semplice (una sola spira) ha una certa induttanza che smorza le variazioni brusche di corrente. Per esempio, se si chiude un circuito di resistenza R su un generatore di tensione (costante) V, la legge di Ohm dà $Ri = V - d\Phi/dt = V - Ldi/dt$ (equazione differenziale non difficile da integrare). All'apertura del circuito le cose sono ancora più semplici: manca V.

Induttanza mutua. Rappresenta il legame tra due bobine. Una prima bobina (N_1, S,l) percorsa da una corrente i_1 genera un campo magnetico $B_1 = \mu(N_1/l)i_1$ che si concatena con le N_2 di una seconda bobina (N_2,S,l). Il flusso attraverso la seconda bobina è $\Phi_2 = B_1N_2S = \mu(N_1N_2S/l)i_1 = M_{1,2}.i_1$, avendo posto $M_{1,2} = \mu(N_1N_2S/l)$. Se invece è la seconda bobina ad essere alimentata da una corrente i_2, il flusso magnetico concatenato con la prima è $\Phi_1 = B_2N_1S = \mu(N_2N_1S/l)i_2 = M_{2,1}i_2$ e perciò

$M_{2,1} = M_{1,2} = \mu N_1 N_2 \frac{S}{l}$ (mutua induttanza). E' molto importante per la teoria del trasformatore statico.

Applicazioni

Principio del generatore di corrente alternata (alternatore)

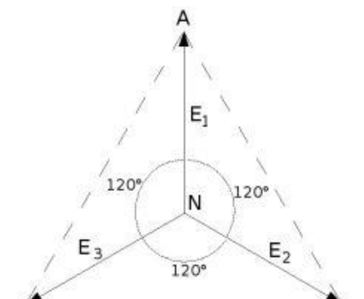


Spira rotante in campo magnetico

Detto B il campo magnetico generato dal magnete, il flusso di B attraverso la bobina ABCD di area S è Φ=NBScosθ, essendo θ=ωt l'angolo tra il vettore B (Nord- Sud) e la normale all'area della bobina ABCD; N il numero di spire della bobina, ω la velocità angolare (costante) con cui si fa girare l'albero su cui è montata la bobina. La corrente indotta è i=-(1/R)dΦ/dt=(1/R)NBSω.sen(ωt).

Generatore trifase

Si può considerare un generatore trifase come costituito da tre generatori singoli di corrente alternata con la stessa frequenza ma con le fasi traslate o sfasate di 120°. Se si considera a potenziale di riferimento zero un terminale di ciascun generatore, la tensione presente ai capi liberi è schematizzata nel seguente diagramma polare:



Si possono osservare i fasori corrispondenti alle tre *tensioni di fase* E_1, E_2 ed E_3, misurate in riferimento al punto centrale *N*, (chiamato *neutro*). La somma vettoriale delle tensioni è nulla se il sistema è equilibrato e simmetrico, ovvero se le tensioni sono identiche in modulo e sfasate esattamente di 120°.

Le tensioni misurate tra i punti *A-B*, *B-C* e *C-A* sono dette *tensioni concatenate*. In un sistema equilibrato e simmetrico, la relazione tra tensioni di fase e tensioni concatenate è data da:

$$\bar{U}_{12} = \bar{E}_1 - \bar{E}_2 = \sqrt{3} \cdot E/120°$$

$$\bar{U}_{23} = \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = \sqrt{3} \cdot E/0°$$

$$\bar{U}_{31} = \bar{E}_3 - \bar{E}_1 = \sqrt{3} \cdot E/-120°$$

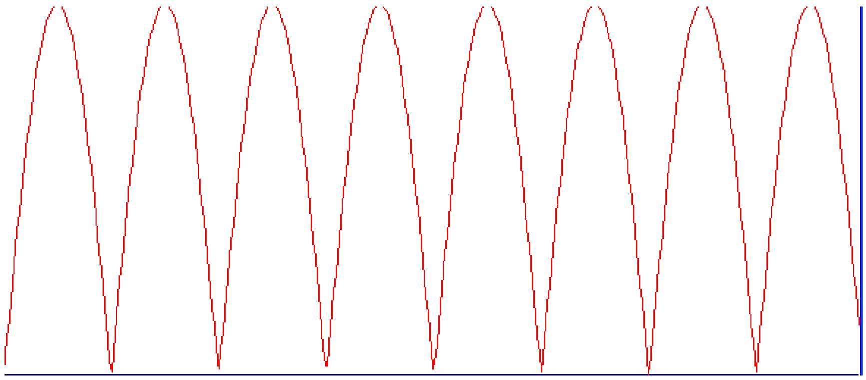
dove *E* è il modulo identico per le tre tensioni di fase.

In modulo, si ha: $U = \sqrt{3} \cdot E$

Le tensioni ufficialmente usate in Italia sono: 230 volt per le tensioni linea-neutro e 400 volt per le tensioni concatenate. (Una volta erano 220 e 380 poi sono stati modificati per adeguamento alla rete europea). Si noti come il rapporto tra queste tensioni sia di $\sqrt{3}$.

Dinamo- Anello di Pacinotti.

Se in alternatore i due anelli collettori (vedi figura precedente) sono sostituiti da un unico anello diviso a metà, in modo che le spazzole striscino contro i due semianelli, la corrente alternata (sinusoidale) è raddrizzata e trasformata in corrente pulsante unidirezionale, come mostra il seguente disegno:



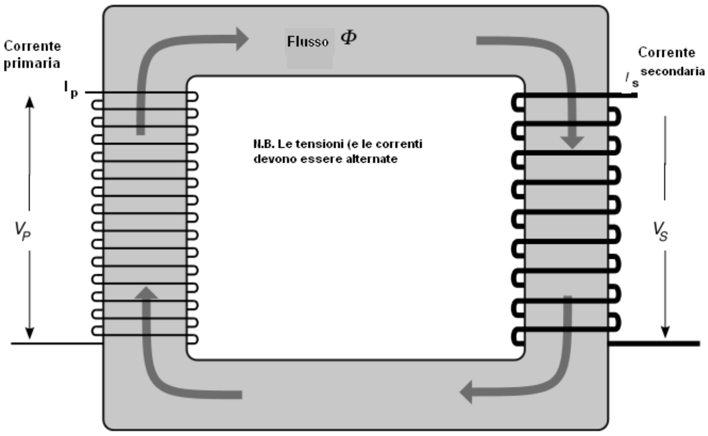
Una corrente pulsante può essere trasformata in corrente quasi continua mediante gli accorgimenti realizzati nell'anello ideato da Pacinotti nel 1859.

Si tratta di un grosso anello, ruotante in un campo magnetico B perpendicolare all'albero dell'anello, sul quale sono disposte e collegate in serie un certo numero di bobine. Ogni bobina è a sua volta collegata a una lamina di rame, una per bobina. Ciascuna lamina è fissata sul collettore, che è un cilindro di sostanza isolante che ruota insieme all'anello. Due spazzole in posizioni fisse strisciano su tali lamine. La corrente così ottenuta non è a rigore continua e la f.e.m. non è perfettamente costante, dal momento che varia nel tempo in cui le spazzole passano da una lamina all'altra del collettore. Però se il numero di tali lamine è alto, le variazioni sono così piccole, che la corrente risultante si può dire praticamente continua.
Questa macchina è reversibile: se si invia corrente continua all'indotto, esso si mette a ruotare fornendo energia meccanica. Inviando infatti corrente continua nel circuito del rotore, si magnetizza il nucleo di ferro su cui è avvolto il circuito stesso. Le azioni attrattive e repulsive che si determinano tra i poli dell'indotto e quelli dell'induttore fanno nascere una coppia motrice che fa ruotare l'indotto.

Modello di motore trifase (asincrono) di Galileo Ferraris.

Le tre bobine sfasate di 120° si alimentano con le tre fasi di una corrente trifase. I tre campi magnetici alternati al centro, sull'albero motore dell'indotto, si combinano in un campo magnetico rotante che trascina nella sua rotazione l'albero motore (che deve essere conduttore). Si noti che non c'è bisogno di spazzole striscianti

Trasformatore statico



Il rapporto tra le tensioni al secondario e al primario è uguale al rapporto tra il numero di spire: $\frac{V_S}{V_P} = \frac{N_S}{N_P}$. Questa formula è solo approssimata e vale se la frequenza della corrente al primario (uguale alla frequenza al secondario) è abbastanza alta. Il suo funzionamento è reversibile, nel senso che può servire sia ad alzare sia ad abbassare la tensione. La formula esatta è

$$\frac{V_S}{V_P} = \frac{\omega M}{\sqrt{R_P^2 + (\omega L_P)^2}} = \frac{\omega \mu N_P N_S (S/l)}{\sqrt{R_P^2 + (\omega \mu N_P^2 (S/l))^2}} \approx \frac{N_S}{N_P}$$

se la resistenza ohmica R_P del primario è trascurabile rispetto alla sua resistenza induttiva ωL_P (*reattanza*).

Le equazioni di Maxwell. Sono le quattro seguenti:

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\ \mathrm{d}V \qquad [1]$$

(Flusso di **E**, legge di Gauss))

$$\iint_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S = 0 \qquad [2]$$

(Flusso di **B** = 0, non esistono poli magnetici isolati)

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S \qquad [3]$$

(Circuitazione di **E**, legge di Faraday)

$$\oint_l \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \mu I + \mu\varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\mathrm{d}S \qquad [4]$$

(Circuitazione di **B**, legge di Ampère – Maxwell)

Nel vuoto $\epsilon = \epsilon_0 = 8{,}859.10^{-12}$ F/m (farad al metro) e $\mu = \mu_0 = 12{,}56.10^{-7}$ H/m (Henry/m).
La [1] è la legge di Gauss dell'elettrostatica, la [2] permette di dire che il flusso del campo magnetico concatenato con una linea chiusa (circuito) si può calcolare attraverso qualsiasi superficie che abbia quel circuito come bordo. La circuitazione di **E** è la f.e.m. indotta ; essa non è zero, come per il campo elettrostatico, il campo **E** che compare nella terza equazione di Maxwell è detto campo elettromotore e non è conservativo.
La quarta equazione, limitata al primo addendo del secondo membro, è la legge di Ampère che consente di calcolare il campo magnetico in casi semplici.
Nel caso di campi statici la circuitazione di E è zero (non esistono correnti magnetiche); se i campi sono variabili, considerazioni di simmetria indussero Maxwell a introdurre il 2° addendo del 2° membro della [4]: la cosiddetta corrente di spostamento. Essa si comporta come una vera e propria corrente di conduzione (flusso di elettroni o di ioni) e salda la corrente di conduzione che si arresta alle armature di un condensatore: per la corrente continua il condensatore rappresenta un tratto del circuito a resistenza infinita. Le equazioni [3] e [4] rendono evidente che i campi elettrico e magnetico variabili sono indissolubilmente connessi e costituiscono un'unica entità, detta campo elettromagnetico.
Nel vuoto le equazioni di Maxwell si semplificano:

[1'] $\iint_S \vec{E}.\hat{n}dS = 0$ (non ci sono cariche libere)

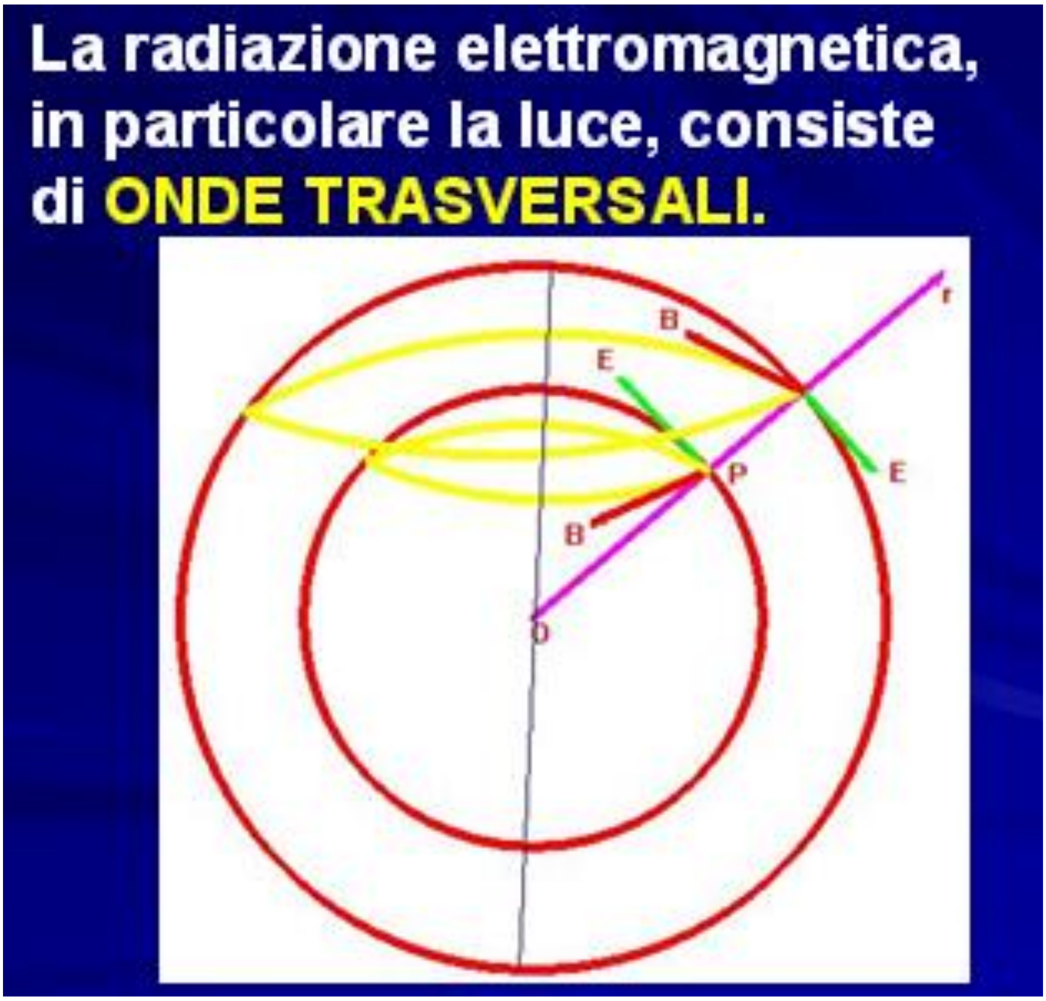
[2'] $\iint_S \vec{B}.\hat{n}dS = 0$

[3'] $\oint_l \vec{E}.d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}.\hat{n}dS$

[4'] $\oint_l \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}.\hat{n}dS$ (non ci sono correnti di conduzione I).

Sviluppando i calcoli, Maxwell da queste quattro equazioni trasse una conseguenza fondamentale. **Il campo elettromagnetico si propaga perpendicolarmente ai campi (variabili) elettrico e ma-**

gnetico, che a loro volta sono perpendicolari tra loro: *il campo elettromagnetico consiste di onde trasversali.*



Ma c'è di più: il campo elettromagnetico si propaga con una velocità $v_{e.m.} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, che nel vuoto vale $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \sim 3.10^8 m/s$. Questa è la velocità della luce nel vuoto e Maxwell si convinse che la luce, che già si sapeva consistere di onde trasversali, fosse di natura elettromagnetica. Già però Faraday aveva capito che ci doveva essere un legame tra luce e magnetismo, avendo scoperto che un forte campo magnetico ruota il piano di polarizzazione della luce.

Nota importante. Secondo la teoria elettromagnetica, la velocità della luce è $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, cioè è data da due costanti che niente hanno a che vedere con sistemi di riferimento. Dunque la velocità della luce è indipendente dal sistema di riferimento in cui è misurata: è un ***assoluto***. Questo sarà il 2° principio su cui Einstein fondò la teoria della relatività (ristretta).

Un'altra osservazione importante è la seguente: l'esistenza del campo magnetico è una conseguenza (è una correzione) relativistica del campo elettrico. La legge di Biot e Savart può essere ricavata *a tavolino* applicando la relatività ristretta al campo elettrico generato da una carica in moto.

Se in natura non esistesse una velocità limite (c: la velocità della luce), ma fossero possibili velocità arbitrariamente alte, la meccanica relativistica si ridurrebbe alla meccanica classica e non ci sarebbero campi magnetici, ma solo campi elettrici (niente generatori di corrente elettrica, niente motori elettrici.