Ottavio Serra

Sintesi su Campi elettrici e magnetici

La legge di Coulomb. E' ricalcata sulla legge di Newton della gravitazione:

$\vec{F} = -G\dfrac{Mm}{r^3}\vec{r}$, dove M ed m sono le *cariche gravitazionali* che già Newton riconobbe essere proporzionali alle masse inerziali e perciò identificate con esse. La legge di Coulomb è:

$\vec{F} = K\dfrac{Qq}{r^3}\vec{r}$. Entrambe le leggi affermano che, se le cariche sono puntiformi, la forza è radiale e inversamente proporzionale al quadrato della distanza r tra le due particelle. Però, mentre la forza gravitazionale è sempre attrattiva (e perciò è evidenziato il segno "meno"), la forza elettrica può essere attrattiva (cariche di segno opposto) o repulsiva (segni concordi). Nel sistema cgs (K=1), l'unità di carica elettrica, statCoulomb, è quella che posta (nel vuoto) a 1 cm da una uguale la respinge con la forza di 1 dyne. E', più o meno, la carica che si realizza strofinando una biro con un pano di lana. Nel sistema MKS (SI), volendo che un Coulomb (1 C) fluendo in un voltametro a nitrato di argento neutralizzi mg 1,118 di Ag al catodo, occorre assegnare a K il valore di circa 9.10^9. Il Coulomb è perciò, staticamente, una carica enorme.

Campo elettrico. Come ogni campo vettoriale, è definito come la forza agente sull'unità di carica.

$\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q}$. Il campo elettrico si misura in N/C, mentre il campo di gravità in m/s^2, è un'accelerazione, avendo identificato la carica gravitazionale con la massa. Per una sorgente puntiforme $\vec{E} = KQ\dfrac{\vec{r}}{r^3}$.

Il modulo è chiaramente KQ/r^2.

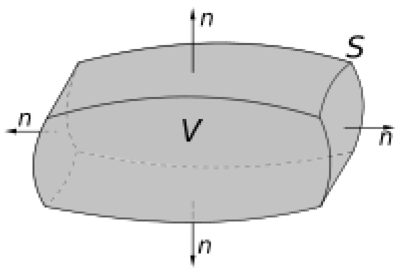
In ogni caso q, carica di prova, rispettivamente m, deve essere *molto* piccola per non disturbare il campo oggetto di misura.

Se il campo è generato da più cariche, $\vec{E} = K\sum_{i=1}^{n}\dfrac{Q_i}{r_i^3}\vec{r}_i$. La somma va sostituita da un integrale (triplo!) nel caso di una distribuzione continua di cariche sorgenti, da un integrale superficiale se le cariche sono distribuite su una superficie, come nel caso dei conduttori.

Flusso di un campo vettoriale. Il flusso Φ di **E** attraverso un elemento di superficie ΔS è definito come $\Phi = \vec{E}.\Delta\vec{S} = \vec{E}.\vec{n}\Delta S = E\Delta S\cos\theta$, essendo n il versore della normale a ΔS orientato in uno dei due modi possibili e θ l'angolo tra n ed **E.**

Se la superficie è estesa, $\Phi = \sum_{i=1}^{n} E_i\Delta S_i\cos\theta_i = ... = \int_S E\cos\theta dS$, orientando le normali ad elementi contigui di superficie nello stesso semispazio (nello stesso verso). Nel caso di una superficie chiusa si conviene di orientare le normali verso l'esterno. **Ricavare l'unità di misura del flusso elettrico.**

Teorema di Gauss. Il flusso *uscente* da una superficie chiusa è Φ = 4πKQ, essendo Q la carica totale interna alla superficie (somma algebrica delle cariche).



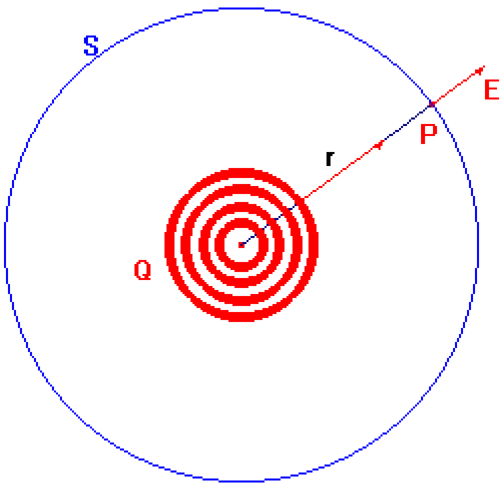
Considero un'unica sorgente Q. Il flusso attraverso S è $\Phi = KQ\int_S \frac{\cos\theta dS}{r^2} = \Phi = KQ\int_S \frac{d\sigma}{r^2}$, essendo dσ la proiezione di dS sul piano ortogonale al vettore r ; $d\sigma/r^2$ è l'elemento di angolo solido $d\Omega$ che proietta dσ dal punto in cui è Q: $\Phi = KQ\int_S d\Omega = KQ4\pi$. (4π steradianti è l'angolo solido totale).

In generale, $\Phi = 4\pi K\sum_{i=1}^{n} Q_i = ... = 4\pi K\int_V \rho dV$, essendo ρ la densità (volumica) di carica elettrica.

N.B. Il flusso del campo gravitazionale è sempre negativo.
Il flusso del campo magnetico è sempre zero (i poli magnetici vanno sempre a coppie: non esistono monopoli magnetici, almeno fino ad oggi).

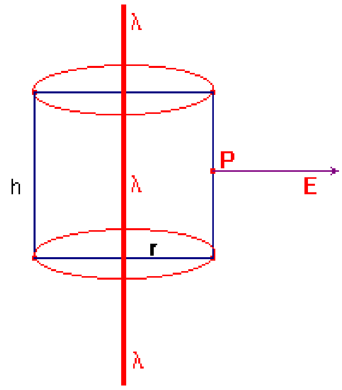
Conseguenze.

1. Il campo elettrico generato da una sfera elettrizzata i modo uniforme è identico a quello di una sorgente puntiforme avente tutta la carica della sfera.



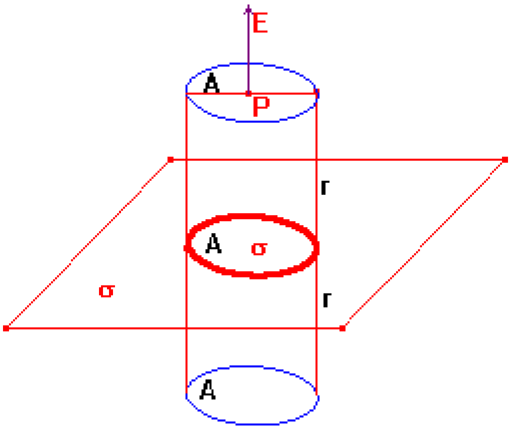
Infatti il flusso uscente dalla superficie sferica S concentrica alla sfera elettrizzata è 4πKQ; inoltre per simmetria in ogni punto P di S il campo E è radiale e tale flusso è anche $ES=E(4\pi r^2)$.

2. Il campo elettrico generato da un filo rettilineo indefinito (infinitamente lungo !?) elettrizzato uniformemente con densità lineare di carica λ C/m è 2Kλ/r.



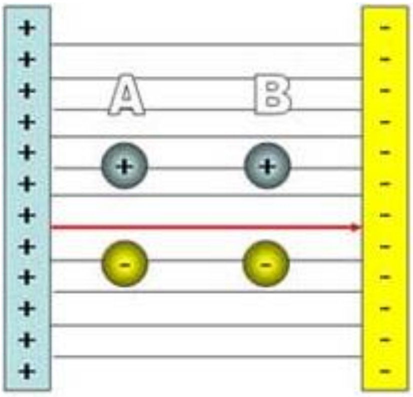
Basta considerare una superficie chiusa di forma cilindrica coassiale al filo, di raggio r pari alla distanza tra il filo e il punto P e di altezza arbitraria h. Il campo nel punto P per simmetria è perpendicolare al filo e quindi anche alla superficie laterale del cilindro, per cui il flusso uscente dalla superficie laterale del cilindro è E.(2πrh), mentre quello uscente dalle basi è zero. D'altra parte il flusso è 4πK(h λ) e uguagliando E=2Kλ/r

3. Campo elettrico di uno strato piano con densità superficiale omogenea σ C/m^2. Si vuole il campo elettrico in un punto P distante r. Si prenda una scatola cilindrica con le basi, di area A, parallele al piano e distanti r da esso. Per simmetria il campo è perpendicolare al piano e perciò alle basi della scatola, il flusso uscente dalla superficie laterale questa volta è zero (la normale è perpendicolare al campo) e il flusso uscente dalla scatola è quello attraverso le due basi: (2A)E = 4πK(Aσ) → E=2πKσ indipendente dalla distanza d del punto P dal piano.



N.B. Vedremo che per comodità si pone $K = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, con ε_0 *costante dielettrica* del vuoto (da K=9.10^9 si ricava ε_0 =8,86.10^{-12} unità MKS … F/m [Farad al metro]) per cui, per esempio, l'ultima formula E=2πKσ diventa $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ e analogamente per le altre.

Doppio strato.



Si tratta di due piastre conduttrici con densità superficiale +σ e –σ . il campo interno (vedi freccia rossa) è $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ (spingi e tira verso destra le cariche positive, verso sinistra le negative), mentre il campo esterno è zero (perché…).

Potenziale. Il campo elettrico è **conservativo**: il lavoro compiuto dal campo per spostare una carica (di prova) da un punto A a un punto B non dipende dal cammino, ma solo da A e da B. Per un campo centrale generato da Q : $W_{AB} = \dfrac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_B}\right)$, essendo r_A ed r_B le distanze di A e di B dal punto in cui è la sorgente Q del campo. Infatti,

$$W_{A,B} = \int_{\gamma(A,B)} \frac{KQq}{r^3}\vec{r}.d\vec{s} = \int_{\gamma(A,B)} \frac{KQq}{r^3} rdr = \int_{r_A}^{r_B} KQq\frac{dr}{r^2} = KQq\left[\frac{-1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

Il quoziente $\frac{W_{AB}}{q}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$si chiama differenza di potenziale tra A e B: V_A - V_B. Si definisce **potenziale** in un punto P distante r da Q la d.d.p. V tra P e l'infinito: $V=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. Unità di misura: Volt (V) = J/C (Joule/Coulomb). *Potenziale zero do riferimento*. Che significa *mettere a terra?*

Conduttori. Lo spazio interno e la superficie di un conduttore sono equipotenziali. Se infatti ci fosse una d.d.p. tra due punti del conduttore, si avrebbe un moto di cariche tra i due punti, mentre si deve raggiungere l'equilibrio per la conservazione dell'energia. Per lo stesso motivo il campo elettrico nell'interno è zero, sulla superficie è perpendicolare alla superficie stessa (altrimenti la componente tangente alla superficie manterrebbe in moto le cariche) e vale σ/ε_0.(Basta considerare un cilindro con le basi parallele alla superficie, una esterna e una interna al conduttore e le generatrici parallele al campo. Il flusso del campo esce solo dalla base esterna). Inoltre **la carica si distribuisce sulla superficie esterna**: se ci fosse una carica netta nell'interno, applicando il teorema di Gauss a una superficie chiusa interna al conduttore e racchiudente tale carica, si troverebbe un campo non nullo, contro ciò che abbiamo stabilito qui sopra.

Capacità di un conduttore. E' il rapporto C tra la carica fornita al conduttore e il potenziale acquistato da esso. C = Q/V. Unità di misura: F (Farad) = C/V (Coulomb/volt).

Capacità di un conduttore sferico isolato: $C=Q/V=Q/(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R})=4\pi\varepsilon_0 R$. Si deduce che la costante dielettrica ε_0 si misura in F/m ($8{,}86.10^{-12}$ F/m).

Esercizio. Che raggio dovrebbe avere una sfera conduttrice per arrivare alla capacità di 1 Farad?

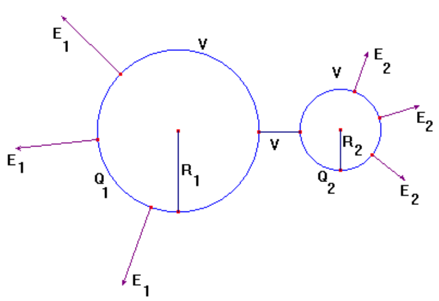
Capacità di un doppio strato (*condensatore piano*). Detta A l'area di una piastra (armatura) , d la loro distanza, la carica fornita alla piastra positiva è $Q=\sigma A$, la d.d.p. tra le armature è V=E.d, cioè $V=\sigma d/\varepsilon_0$ e infine $C=\varepsilon_0$ A/d.

Esercizio, Calcolare la capacità di un **condensatore sferico** (due sfere concentriche non a contatto). Verificare che se la differenza tra i raggi è *piccola*, la capacità è approssimata dalla formula del condensatore piano.

Esercizio. Calcolare la capacità di un condensatore cilindrico. Se la lunghezza h del cilindro è grande, il campo generato dal cilindro centrale di raggio r, nell'intercapedine, cioè per x compreso tra r ed R (raggio del cilindro esterno), è $E=\frac{2K\lambda}{x}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$ e $V_r-V_R=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^R\frac{dx}{x}=\ldots$ D'altra parte la carica è $Q=\lambda h$, eccetera.

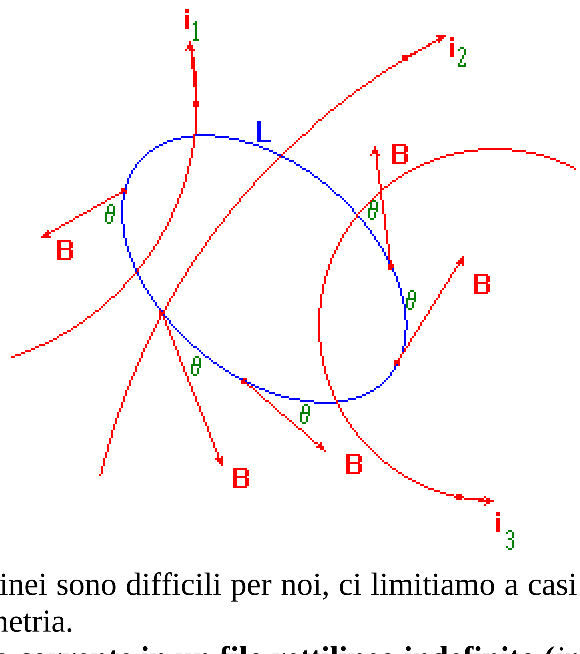
Sulla superficie di un conduttore la densità superficiale di carica σ e di conseguenza il campo elettrico è proporzionale alla curvatura, cioè a 1/R, essendo R il raggio di curvatura (raggio della sfera *osculatrice*).

Schematizzo il conduttore come due sfere di raggio R_1 ed R_2 collegate da un sottile filo conduttore di capacità trascurabile. Le capacità delle sfere sono $C_1=\varepsilon_0 R_1$ e $C_2=\varepsilon_0 R_2$ e le cariche $Q_1=C_1V$, $Q_2=C_2V$; perciò le cariche $Q_1=\varepsilon_0 VR_1$, $Q_2=\varepsilon_0 VR_2$ sono proporzionali ai raggi; ma $\sigma=Q/(4\pi R^2)$, perciò le densità superficiali sono inversamente proporzionali ai raggi di curvatura e tali saranno anche i campi.



Il campo magnetico. Lo posso sperimentare con una bussola che si orienta nel campo magnetico terrestre o nel campo magnetico generato da una calamita. Ma il campo magnetico è essenzialmente generato da una corrente elettrica, cioè da cariche in moto, come il campo elettrico (elettrostatico) è generato da cariche in quiete. (**Esperienza do Oersted**). Una bobinetta percorsa da corrente si orienta nel campo di un magnete (a ferro di cavallo) o in quello generato da bobine percorse da corrente. Si può stabilire così che l'estremità della bobinetta, guardando la quale la corrente è *vista* (come?) circolare in senso antiorario è il ***polo magnetico Nord***.
L'esperimento della limatura di ferro ci dice che le linee di forza del campo magnetico sono linee chiuse percorse in senso antiorario rispetto al verso della corrente. Nel caso che la corrente fluisca in un filo rettilineo (indefinito), le linee di forza sono circonferenze perpendicolari al filo e col centro sul filo.
Prima regola della mano destra. Se il verso della corrente è quello del pollice della mano destra, il verso del campo magnetico è quello delle quattro dita che si chiudono.
Circuitazione del campo magnetico <u>B</u>. In generale, la circuitazione di un campo vettoriale <u>**v**</u> su un tratto infinitesimo di curva <u>Δl</u> è definita come prodotto scalare di <u>**v**</u> e <u>Δl</u>, essendo quest'ultimo vettore orientato in modo arbitrario. $C \equiv C(\vec{v}, \Delta l) = \vec{v}.\Delta\vec{l} = v\Delta l \cos\theta$.
Nel caso di una curva regolare chiusa l'orientazione è per convenzione quella antioraria.
Il teorema di Ampère afferma che la circuitazione del campo magnetico **<u>B</u>** lungo una linea chiusa è proporzionale alla somma algebrica delle correnti concatenate. La costante di proporzionalità si chiama *permeabilità magnetica* (del vuoto): μ_0.

$$C = \sum_{k=1}^{n} B_k \Delta l_k \cos\theta_k = \ldots = \oint_l B\cos\theta dl = \mu_0(i_1 + i_2 + \ldots + i_r)$$



Siccome gli integrali curvilinei sono difficili per noi, ci limitiamo a casi semplici, in cui è possibile sfruttare condizioni di simmetria.
1) Campo generato da una corrente in un filo rettilineo indefinito (*infinitamente lungo***)**.
Prendiamo una linea circolare in un piano perpendicolare alla corrente e col centro sul filo di raggio r pari alla distanza dal filo del punto P in cui calcolare il campo magnetico. Per ragioni di simmetria il campo sarà di uguale modulo in tutti i punti della linea e ad essa tangente, perciò la circuitazione C sarà B.2πr. Dal teorema di Ampère: $B2\pi r = \mu_0 i$ e quindi $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$ (**Legge di Biot e Savart**).
2) Campo magnetico all'interno di un solenoide (bobina). Sia i la corrente nel solenoide, l la lunghezza, N il numero delle spire. Per ragioni di simmetria il campo magnetico nell'interno della bobina è parallelo al suo asse, mentre all'esterno vale zero (bobina ideale infinitamente lunga). Co-

me linea chiusa prendiamo una linea rettangolare con un lato interno alla bobina e parallelo all'asse di lunghezza L e il lato opposto esterno. La circuitazione di **B** è diversa da zero solo sul lato interno parallelo all'asse della bobina (sul lato opposto C è zero perché è zero **B** , sugli altri due C=0 perché **B** è perpendicolare ad essi). Segue BL=μ_0(nL)i, essendo n il numero di spire per unità di lunghezza, perciò B= $\mu_0$ni. Questa formula è molto importante perché la bobina è un dispositivo tecnico che si trova dappertutto.

3) Campo al centro di una spira circolare percorsa da una corrente i. E' più difficile da calcolare; il campo è **perpendicolare** alla spira e vale $B = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}$.

Forza che un campo magnetico B esercita su un elemento di corrente i.ΔL . $\vec{F} = i\Delta\vec{L} \times \vec{B}$ (prodotto vettoriale): la forza è perpendicolare ai due vettori i.Δ**L** e **B** , verso tale che il primo vettore ruoti in senso antiorario per sovrapporsi al secondo e modulo iΔLBsenθ.

Seconda regola della mano destra: se il campo B è diretto come le quattro dita della mano destra (ora immaginatele tese) e l'elemento di corrente iΔL come il pollice, la forza sta sul palmo, agisce come un **ceffone**.

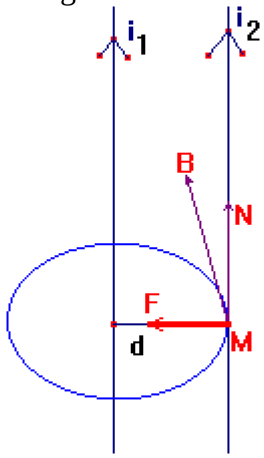
Unità di misura di B. Dalla legge della forza si ricava che [B] =[F/(iL)] e perciò si misura in N/(Am) = Nm/(Am^2)=J/(Cs^{-1}m^2)=Vs/m^2=Weber/m^2 = T (Tesla).

A questo punto possiamo ricavare l'unità di misura della permeabilità magnetica μ_0. Dalla legge di Biot e Savart si ricava [μ_0]=[Br/i] e perciò μ_0 si misura in (Vs/m^2(m/A)=Ωsm^{-1} = Henry/m. Il suo valore numerico nel sistema MKS internazionale (SI) è 4π.10^{-7}. Il motivo apparirà chiaro quando definiremo l'Ampère elettrodinamico in modo da metterlo d'accordo con l'Ampère internazionale definito per via elettrolitica (Vedi sopra il Coulomb elettrolitico).

Legge di Lorenz. Dalla forza agente su un elemento di corrente si ricava la forza agente su una carica in moto, perché i.Δ**L** = q. **v** , quindi $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.

Forza agente tra due correnti parallele. Supponiamo che siano concordi i_1 e i_2 a distanza d.

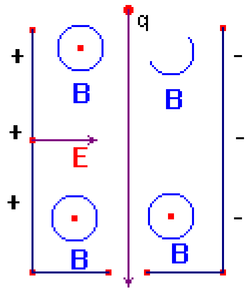
Il campo generato dalla prima è $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1}{d}$ e la forza agente su i_2Δl è $F = i_2\Delta l.B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{d}\Delta l$ e tale forza è attrattiva: i due fili si attirano (vedi figura sottostante: MN = i_2Δl).



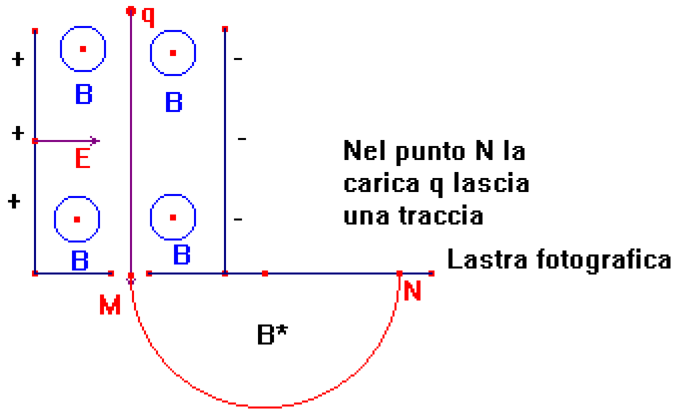
Definizione di Ampère internazionale. E' quella corrente che circolando in due fili paralleli distanti 1metro nello stesso verso, esercita su un tratto di 1 metro di uno dei fili la forza di 2.10^{-7}N. Tale corrente, circolando in un voltametro a $AgNO_3$, fa depositare mg 1,118 di Ag in un secondo e perciò si è decisodi fissare il valore di μ_0 in 4π10^{-7} H/m.

Applicazioni.

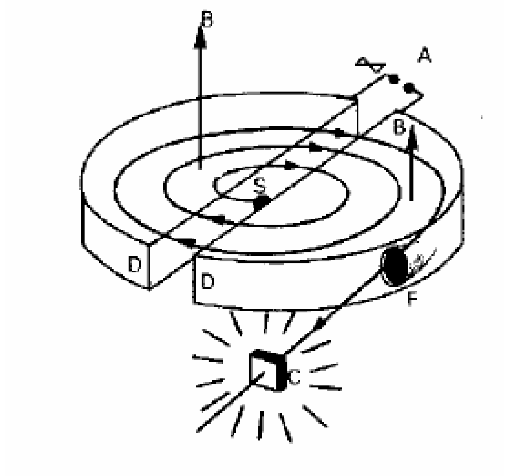
(a) Selettore di velocità. In una camera a vuoto si pone un condensatore piano le cui armature, distanti d, sono collegate a un generatore che fornisce una differenza di potenziale (variabile) V. Nel condensatore c'è perciò un campo elettrico **E** di modulo V/d, diretto, come nella figura sottostante, verso destra. Si dispone poi un elettromagnete che genera un campo **B** diretto verso l'alto della figura. Una carica q, supposta positiva, muovendosi verso il basso (della figura) con velocità **v** è soggetta alla forza elettrica $\underline{\mathbf{F}}_e = q\underline{\mathbf{E}}$ diretta verso destra e alla forza magnetica $\underline{\mathbf{F}}_B = q\underline{\mathbf{v}}\times\underline{\mathbf{B}}$ diretta verso sinistra. Tutto il contrario, se q è negativa. Se i moduli delle due forze sono uguali, qE = qvB, la carica q si muove di moto rettilineo uniforme ed emerge dalla stretta fenditura in basso. Si ricava così v = E/B.



(b) Spettrografo di massa. Se all'uscita del selettore di velocità si dispone un secondo campo magnetico $\underline{\mathbf{B}}^*$ che devia q verso destra, questa descrive una semicirconferenza di diametro 2R=MN. La forza di Lorenz dà $F=qvB^*$ che si uguaglia alla forza centripeta mv^2/R. Si ricava così la carica specifica $q/m = v/(RB^*)$. Se la carica è nota, come è di solito, si ottiene la massa.



(c) Ciclotrone.



D = elettrodi acceleratori cavi

S = sorgente di ioni al centro della macchina

B= campo magnetico perpendicolare alla traiettoria delle particelle

F= sistema di estrazione del fascio

C= Bersaglio (Target)

Dalla legge di Lorentz:

$$F = \frac{mv^2}{r} = qvB \rightarrow m\omega = qB \rightarrow \omega = \frac{qB}{m}$$

Come si nota, la frequenza angolare ω è indipendente dalla velocità e quindi dall'energia degli ioni accelerati, perciò la radiofrequenza è sincronizzata su un valore fisso; ma ciò è vero finché non si raggiungano velocità relativistiche; in tal caso il ciclotrone si sfasa e va sostituito dal sincrotrone.