Ottavio Serra

Dualismo onda – corpuscolo. Principio di indeterminazione.

Modello ondulatorio e modello corpuscolare per la luce.

Il modello ondulatorio interpreta molto bene i fenomeni di diffrazione e di interferenza e consente di misurare direttamente la lunghezza d'onda. Se, per esempio, un fascio luminoso collimato (raggi paralleli) attraversa un reticolo di passo p, su uno schermo (lastra fotografica, retina dell'occhio), si ha luce se $n.\lambda = p.\mathrm{sen}(\alpha)$, essendo n un numero intero, λ la lunghezza d'onda, α l'angolo di deflessione rispetto alla direzione del fascio incidente.

D'altra parte l'effetto fotoelettrico, e ancor di più l'effetto Compton, impongono un modello corpuscolare, corroborato dal fatto che, se l'intensità del fascio è molto piccola, la luce arriva sul rivelatore in quantità discrete ben evidenti con un fotomoltiplicatore. Oramai non c'è dubbio che la luce consista di particelle. L'intensità energetica I di un fascio di luce si deve intendere come il prodotto dell'energia $\varepsilon = h\nu$ di un singolo fotone per il numero di fotoni al secondo che arrivano sull'unità di superficie del rivelatore. (Per semplicità considero un fascio monocromatico):

$$I = \frac{\Delta W}{\Delta S.\Delta t} = \frac{n\varepsilon.\Delta S.\Delta l}{\Delta S.\Delta t} = \varepsilon.n.c$$

ΔW è l'energia contenuta in un cilindro di base ΔS e altezza Δl, n è il numero di fotoni per unità di volume, $\Delta l/\Delta t=c$ è la velocità dei fotoni (della luce).

Il legame tra modello corpuscolare e modello ondulatorio per la radiazione è data dalle seguenti relazioni:

[3] $$\varepsilon = h\nu,\ p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Modello corpuscolare e modello ondulatorio per le particelle materiali.

La relazione $p = h/\lambda$ è stata ipotizzata da De Broglie come valida in generale per tutte le particelle e non solo per i fotoni. Per esempio, a un elettrone di massa m e velocità v è associata una lunghezza d'onda

[4] $$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

(l'ultima uguaglianza è valida nell'ipotesi di velocità piccole rispetto a c).

Se , per esempio, un elettrone è accelerato dalla tensione di 100 Volt, la sua velocità è di 6000 Km/s e la lunghezza d'onda associata è di circa 1 A°, cade cioè nella banda dei raggi X.

Se ciò è vero, un fascio di elettroni deve mostrare fenomeni di interferenza e di diffrazione come un fascio di luce (o di raggi X).

La diffrazione di elettroni fu osservata la prima volta da Davisson e Germer nel 1925.

Naturalmente ciò non significa che gli elettroni siano onde, significa solo che la probabilità di trovare un elettrone in un certo posto ha una distribuzione la cui legge matematica ha aspetto ondulatorio.

Relazione tra lunghezza d'onda ed energia di una particella.

a) Per i fotoni: Siccome questi hanno massa zero, si deve necessariamente applicare la relatività. Perciò, misurando la lunghezza d'onda in A° e l'energia in eV, dalle [3] si ottiene:

[5] $$\lambda = \frac{12422}{\varepsilon} \ .$$

b) Per gli elettroni. (in generale per le particelle materiali, aventi cioè massa diversa da zero): Nell'ipotesi di velocità piccole rispetto a quella della luce, essendo $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$, si ricava $p = \sqrt{2m\varepsilon}$ e perciò

[6] $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m\varepsilon}} = \frac{12,345}{\sqrt{\varepsilon}}$. (h=6,626.10^{-34} Joule.secondo, $m_{elettrone}$=0,91.10^{-30} Kg).

Si misura al solito λ in A° ed ε in eV. Il numeratore 12,345 va bene per gli elettroni;per altre particelle va cambiato in base alla massa.

Se però la particella materiale ha velocità relativistica, la [6] va sostituita con

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{(\varepsilon / c)^2 - (mc)^2}} \ .$$

Si noti che se h fosse zero, non ci sarebbero fenomeni ondulatori. Si dice che h→0 dà il limite classico per la meccanica quantistica, come c tendente all'infinito fornisce il limite classico per la meccanica relativistica.

Il principio di indeterminazione

La relazione di De Broglie λ=h/p tra quantità di moto p di una particella (elettrone, fotone o altro) , quantità eminentemente corpuscolare, e lunghezza d'onda associata, quantità eminentemente ondulatoria, conduce alle relazioni di indeterminazione scoperte da Heisenberg:

$$\Delta p_x . \Delta x \geq h$$

e analoghe per le componenti y e z.

Se infatti un elettrone (parlo di un elettrone, ma potrebbe essere un fotone, un neutrone o altra particella) ha quantità di moto ben determinata, per esempio p lungo l'asse x, ad esso è associata un'onda monocromatica di lunghezza d'onda λ=h/p, che si estende lungo tutto l'asse x (una sinusoide indefinita). In tal caso l'indeterminazione Δp sulla quantità di moto è zero, però l'indeterminazione Δx sulla posizione è infinita. Per avere una certa accuratezza nella posizione, un Δx finito, occorre che l'elettrone sia imprigionato su un segmento di lunghezza L (in una dimensione); ciò si può ottenere con due barriere di potenziale molto alte agli estremi di L (per un fotone, mediante due specchi). In tal caso Δx=L, ma ora non è possibile una quantità di moto, una lunghezza d'onda ben determinata: si richiede, a rigore, una infinità di onde che fuori di L si elidano per interferenza. Siano λ_1 ε λ_2 due di esse. Dovrà risultare $L=n\lambda_2=(n+j)\lambda_1$, con j almeno uguale ad 1. Pertanto

$$\Delta p \geq h(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}) = h\frac{1}{L}$$ e infine

[1] $$\Delta x . \Delta p \geq h \ .$$

Da questa si ricava anche una indeterminazione sull'energia e sulla durata del processo necessario per misurare quell'energia. Infatti, in approssimazione non relativistica, $E = \frac{p^2}{2m}$, per cui $\Delta E = \frac{2p\Delta p}{2m} = v\Delta p$, (p/m = v) e quindi

[2] $$\Delta E.\Delta t = \Delta p.v\Delta t = \Delta p.\Delta x \geq h\ .$$

La [2] ha, tra le altre, la seguente applicazione. Le righe spettrali non sono mai infinitamente sottili, perché la pressione del gas, anche se debolissima in un gas rarefatto, e l'effetto Doppler dovuto all'agitazione termica contribuiscono all'allargamento delle righe. Per diminuire, in laboratorio, non certo nelle atmosfere stellari, queste cause di allargamento che limitano la precisione nella misura delle lunghezze d'onda, occorre lavorare a pressioni e temperature estremamente basse, il ché però rende molto deboli le righe da studiare. Resta tuttavia una larghezza ineliminabile, detta larghezza naturale, di origine quantistica. Infatti lo stato eccitato ha una vita media che in generale è molto piccola, dell'ordine di $10^{-9}s$, che dà l'indeterminazione sull'istante del salto quantico; dalla [2] segue allora un'indeterminazione sul livello energetico dello stato eccitato

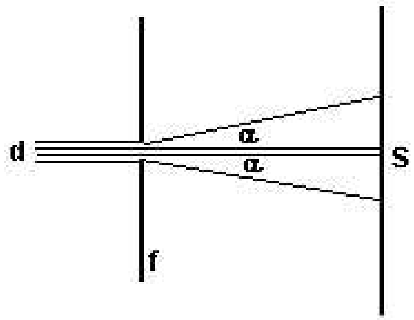
$$\Delta E \geq \frac{h}{\Delta t} \approx \frac{6,6.10^{-34}}{10^{-9}} = 6,6.10^{-25}J \approx 4.10^{-6}eV\ .$$

Verificare che per la riga rossa dell'idrogeno, E=2 eV, λ=6000 A° come ordine di grandezza, dall'indeterminazione di circa 4.10^{-6} eV sull'energia segue un'indeterminazione di circa 1/100 di A° sulla lunghezza d'onda. Sfruttare il atto che da λ=hc/E segue, differenziando, Δλ/λ = ΔE/E.

Uno sguardo più fisico al principio di Heisenberg.

La relazione di indeterminazione si può ottenere in tanti modo più diretti o, se volete, più fisici. Quello che descrivo, dovuto inizialmente a Bohr, è riportato in diversi testi.

Si consideri un fascio monocromatico di particelle (elettroni, fotoni). Monocromatico vuol dire che tutte le particelle hanno la stessa quantità di moto p e quindi, per la relazione di De Broglie, la stessa lunghezza d'onda. Le particelle si muovano perpendicolarmente a un diaframma f sul quale è praticata una fenditura di larghezza d attraverso la quale arrivano su uno schermo rivelatore S (vedi figura).

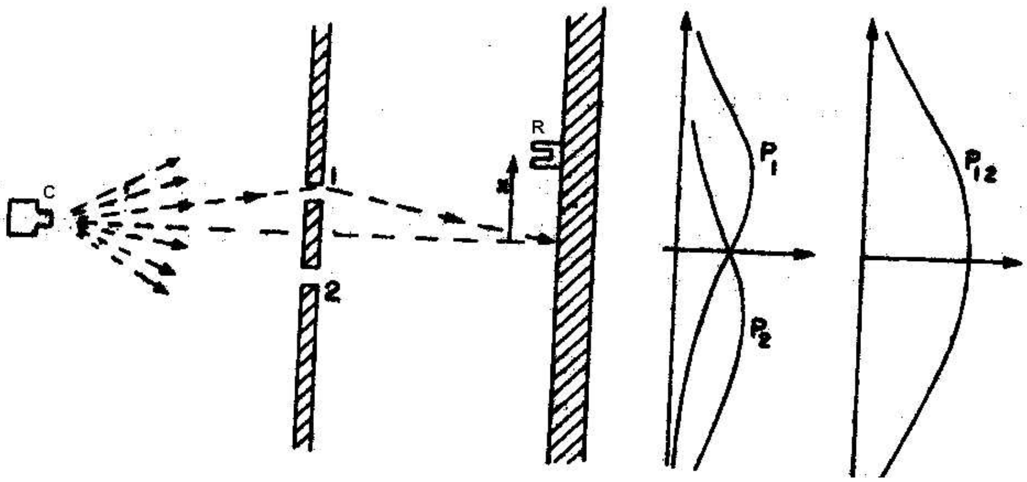


Per effetto della diffrazione il fascio parallelo subisce una dispersione angolare α tale che sen(α)=λ/d. Ma allora parallelamente allo schermo S le particelle avranno un quantità di moto che prima era zero e ora ha un valore indeterminato tra zero e p.sen(α)=pλ/d. D'altra parte, l'indeterminazione in direzione verticale (cioè parallela allo schermo) è d, per cui alla fine si avrà

$$\Delta x.\Delta p \approx d.\frac{p\lambda}{d} = d.\frac{h}{d} = h.$$

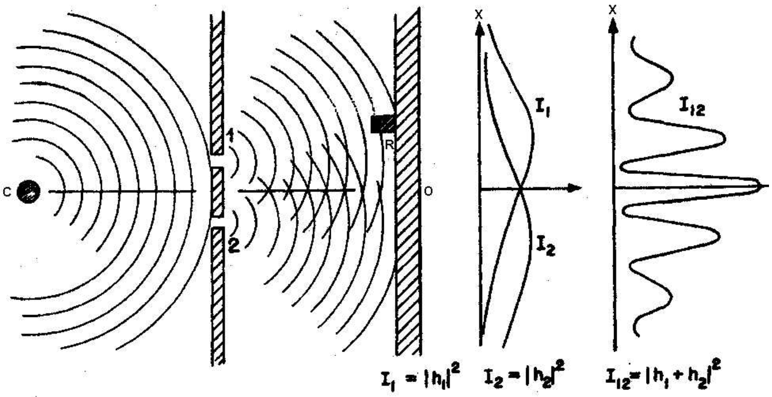
Particelle e onde attraverso due fenditure.

Secondo la meccanica quantistica, la materia usuale: elettroni, protoni, neutroni, e la luce: fotoni, si comportano essenzialmente allo stesso modo, fatta salva la differenza che i fotoni viaggiano sempre alla velocità limite c e perciò la loro dinamica è strettamente relativistica. Gli esperimenti, che ora descriveremo, conducono a un modello indiscutibilmente corpuscolare per tutte la particelle, siano esse elettroni o fotoni. Si tratta di corpuscoli classici, che però non obbediscono alle leggi classiche di Newton della meccanica. Per capire allora come vada inteso il comportamento ondulatorio, partiamo da un esperimento ideale nel quale un fascio di particelle macroscopiche, per esempio un fascio di proiettili, che quindi esibiscono un comportamento manifestamente classico, senza alcuna apparenza ondulatoria, è sparato contro un diaframma che arresta tutti i proiettili, salvo quelli che passano attraverso due fenditure 1 e 2 molto strette. (Vedi figura nella pagina successiva). Se è aperta solo la fenditura 1, i proiettili, sparati dal cannoncino C, colpiscono lo schermo sul quale scorre un rivelatore R, non solamente lungo la retta congiungente C con la fenditura 1, ma anche in punti diversi, perché, sfiorando i bordi della fenditura 1, possono essere deviati in modo imprevedibile. L'unica cosa che si può dire è che nella direzione C - 1 la probabilità è massima; in generale si ha una distribuzione di probabilità data dalla curva P1. Analogamente, se è aperta solo la fenditura 2, la distribuzione di probabilità è data dalla curva P2. Se sono aperte entrambe le fenditure, un proiettile arriva in un punto dello schermo di ascissa x con la probabilità data dalla curva P12. Siccome un proiettile o passa attraverso la fenditura 1 o attraverso la fenditura 2, e questi due eventi sono incompatibili, P12 = P1 + P2. Ciò è d'accordo con l'intuizione (che cos'è l'intuizione?), e risulta anche dal confronto quantitativo delle tre curve di probabilità.



Interferenza di onde luminose (esperimento con fotoni).

Vediamo ora che succede se sostituiamo il cannoncino C con una sorgente luminosa. (L'esperimento si può realizzare anche con onde d'acqua).



Con la sola fenditura 1 aperta, l'intensità luminosa è data dalla curva I1, con la sola fenditura 2 aperta, l'intensità è I2. Si vede che le curve di intensità I1 e I2 rassomigliano alle curve di probabilità classiche P1 e P2 nell'esperimento con proiettili. Se h1 e h2 sono le ampiezze delle onde singole, le intensità sono uguali (proporzionali) ai quadrati delle norme delle ampiezze. Ma se sono aperte entrambe le fenditure, l'intensità I12 non è affatto uguale a I1+I2. Nascono fenomeni di interferenza che non hanno l'uguale nella meccanica classica e risulta

$$I_{12} = |h_1 + h_2|^2 = |h_1|^2 + |h_2|^2 + 2(h_1 \bullet h_2)\,.$$

Si noti che h1 e h2 sono vettori, il cui angolo è lo sfasamento nel punto in cui le onde interferiscono. Il prodotto scalare tra i vettori h1 e h2, che produce interferenza, è $h_1 \bullet h_2 = |h_1|.|h_2|.\cos(\theta)$.

Se subito dopo il diaframma con le fenditure, sull'asse orizzontale dell'apparato sperimentale, si pone un dispositivo che permette di individuare la fenditura attraverso cui è passato il fotone, le frange di interferenza spariscono e la curva I12 diventa analoga alla curva P12.

Ciò dipende dal fatto che, per sapere attraverso quale fenditura passa il fotone, dobbiamo in qualche modi interagire con esso; ciò produce una variazione imprevedibile della angolo di fase e il valore medio del suo coseno è zero: si distrugge l'interferenza.

La cosa interessante è che, se si diminuisce l'intensità luminosa fino a quando sullo schermo arriva un fotone per volta, il rivelatore reagisce come all'arrivo di una particella: un quanto di energia. Se il rivelatore è collegato a un amplificatore acustico, si sente un "clic" la cui intensità non dipende dall'intensità del fascio luminoso, ma solo dalla frequenza della luce adoperata. Un aumento dell'intensità luminosa ha il solo effetto di aumentare il numero di "clic" per unità di tempo.

Risultati analoghi si hanno con una sorgente di elettroni. Tuttavia, mentre con luce visibile la distanza tra le due fenditure può essere macroscopica, dell'ordine di un centesimo di millimetro, con un fascio di elettroni, anche molto lenti, l'interferenza richiede distanze di qualche A°, e perciò può avvenire per riflessione su un reticolo cristallino, come si fa per i raggi X.

Possiamo pertanto concludere che in meccanica quantistica ad ogni particella è associata un funzione vettoriale $\psi(x, y, z, t)$, funzione della posizione e del tempo, il cui modulo al quadrato dà la distribuzione di probabilità di trovare la particella nel punto spazio-temporale (x,y,z,t). La funzione ψ è matematicamente di tipo sinusoidale, per cui si chiama funzione d'onda. Per la sua interpretazione statistica, è detta ampiezza di probabilità. Se la funzione d'onda non dipende dal tempo, il processo associato alla particella è detto stazionario.

Caso di un elettrone vincolato su un segmento di lunghezza l.

In condizioni stazionarie la funzione d'onda dipende solo dalla posizione x con $0 \le x \le a.$

Dovendo essere $\Psi(0) = \Psi(l) = 0,$ sarà $\Psi_n(x) = Asen(\frac{2\pi}{\lambda}x),$ con l=nλ/2. Perciò la quantità di moto è quantizzata: $p_n = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2l}n$ e la velocità sarà $V_n = \frac{h}{2lm}n.$ Segue che anche nello stato n=1 di minima energia la particella non sarà ferma, ma avrà una velocità pari ad h/(2lm). (Ciò per una particella non relativistica, per esempio un elettrone a bassa energia; un fotone invece, avendo sempre velocità c, va trattato con la meccanica relativistica).

L'energia risulterà $E_n = \frac{h^2 n^2}{8ml^2}.$

Quesito: come mai un sasso nello stato di minima energia è fermo?

Ritornando alla funzione d'onda la probabilità di trovare l'elettrone con ascissa compresa tra x e x+dx è P(x).dx , con $P(x) = A^2 sen^2(\frac{\pi n}{l}x)$.

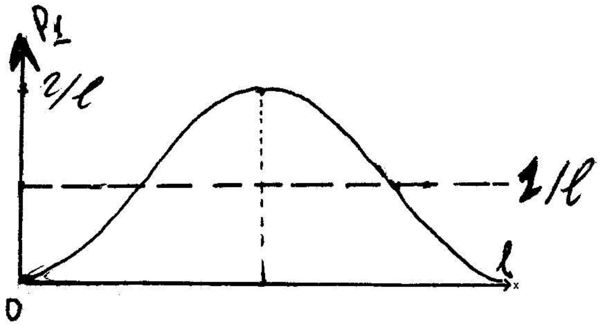
Siccome l'elettrone è vincolato a stare sul segmento di lunghezza l, la probabilità di trovarlo fuori del segmento è zero, mentre è 1 la probabilità di trovarlo sul segmento. Imponendo che

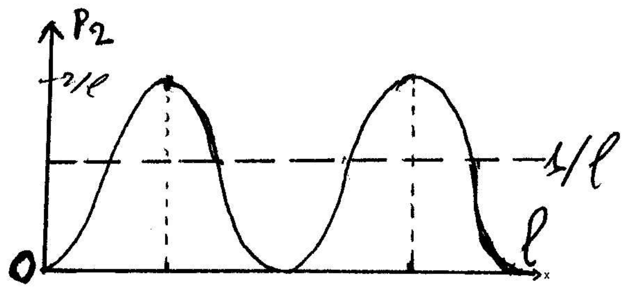
$$\int_0^l A^2 sen^2(\frac{\pi n}{l}x)dx = 1,$$

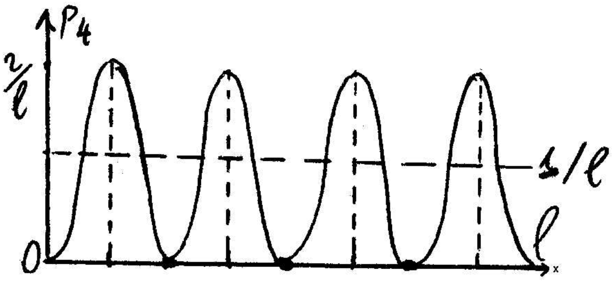
si trova la condizione di *normalizzazione*

$$A^2 = \frac{2}{l}.$$

Nel livello n=1, la probabilità di trovare l'elettrone è massima al centro del segmento, per n=2 è massima a 1/4 dagli estremi e così via. Da un punto di vista classico la distribuzione di probabilità è uniforme (è ugualmente probabile trovare la particella in qualsiasi punto tra 0 ed l); perciò la densità di probabilità classica è $P_{class} = \frac{1}{l}$. La probabilità quantistica ammette la probabilità classica come valore medio, però, per piccoli numeri quantici n, lo scarto è molto forte. Per elevati numeri quantici invece la varianza è piccola e la probabilità quantistica fluttua oscillando in modo estremamente rapido intorno alla probabilità classica, come illustrano i disegni seguenti.







Dalla formula dell'energia si nota che, al crescere del numero quantico n, i livelli energetici sono sempre più distanziati, ma la variazione percentuale tende a zero come 1/n. Ciò significa che per elevati valori dell'energia la discontinuità quantistica sfuma nella continuità classica.

Considerazioni epistemologiche.

L'atto di nascita della scienza è nell'affermazione di Talete (VI° secolo a.C.): "Principio di tutte le cose è l'acqua". Ora, non è importante che il principio sia l'acqua, o l'aria o il numero di Pitagora o il bosone di Higgs; importante è l'affermazione che la molteplicità dei fenomeni si possa ridurre a pochi principi, al limite a uno solo. La fisica moderna va verso questo traguardo. C'erano una volta la forza di gravità, quella elettrica, magnetica, elastica, muscolare eccetera. Poi, dopo la sintesi di Maxwell, si capì che le forze erano essenzialmente quella gravitazionale e quella elettromagnetica.

Però i fisici nucleari verso il 1930 scoprirono le interazioni nucleari: “forte” e “debole”, la *forte* responsabile dell’attrazione tra nucleoni (protoni e neutroni), la *debole* responsabile dei decadimenti radioattivi, e le cose tornarono a complicarsi. Verso il 1970 la forza debole fu unificata con quella elettromagnetica (interazione elettrodebole) e le forze fondamentali scesero a tre. Abdus Salam ottenne per questo il premio Nobel nel 1979, insieme a Sheldon L. Glashow e Steven Weinberg. Questo risultato costituisce ancora oggi il più alto punto di arrivo nello sforzo di descrivere tutte le forze della natura con una sola teoria. Carlo Rubbia nel 1983 ottenne al CERN la conferma sperimentale della teoria e il 1984 gli fu conferito il premio Nobel.

Si spera ora di unificare l’interazione nucleare forte con quella elettrodebole, in modo che fuori del quadro quantistico resti solo la gravità. Il sogno è di arrivare alla grande unificazione (gravità quantistica) e di realizzare l’aspirazione di Talete.
Un’ultima considerazione. Man mano che si arriva a teorie più unitarie e profonde il numero delle grandezze indipendenti diminuisce. La relatività ha unificato da una parte spazio e tempo nello spazio-tempo, dall’altra massa, energia e quantità di moto nel quadrivettore impulso-energia. Il collante è stata l’invarianza della velocità della luce. Analogamente nella meccanica quantistica sono stati unificati lunghezza (d’onda), frequenza ed energia tramite l’altra fondamentale costante, la costante di Plank.
Soluzione di un enigma. Un raggio di luce, passando dal vuoto (o dall’aria) a un mezzo trasparente come l’acqua o il vetro, si avvicina alla normale. Secondo la teoria ondulatoria (confortata dal *principio del minimo tempo* di Fermat, sen(i)/ser(r) = c/V = n (indice di rifrazione). Pertanto la luce, passando dal vuoto a un mezzo materiale, diminuisce di velocità. (Tra parentesi, questa diminuzione di velocità, a parità di mezzo, dipende dalla lunghezza d’onda e si spiega perciò la *dispersione della luce* attraverso un prisma). Ma ciò è in contrasto con la dinamica relativistica, secondo la quale la luce è *costretta* a muoversi a velocità c. L’apparente contraddizione è risolta dalla fisica quantistica. Secondo il fisico Richard Feynman, un fotone del fascio luminoso (pensato monocromatico) viene assorbito da un elettrone del mezzo, che ne riemette uno della stessa energia con un ritardo medio τ. (Questo ritardo dipende dal mezzo e dall’energia del fotone). Detto x lo spessore di un tratto del mezzo, s la distanza tra gli atomi del mezzo, si ha x = k.s, essendo k un numero naturale. Il tempo medio che la luce impiegherà a percorrere il tratto x sarà $t = k\tau + x/c = k\tau + ks/c$ e perciò la velocità **misurata** della luce nel mezzo sarà $V = \frac{x}{t} = \frac{ks}{k(\tau + \frac{s}{c})} = \frac{sc}{\tau c + s} = c.\frac{s}{s + \tau c} < c.$ L’indice di rifrazione è perciò $n = 1 + \frac{\tau c}{s}$.
Secondo enigma. Il radar funziona in aria, ma non in acqua. Per localizzare oggetti sottomarini occorre usare il Sonar che sfrutta onde acustiche (ultrasuoni) e non il radar che sfrutta onde elettromagnetiche come la luce, solo che di lunghezza d’onda molto maggiore. Eppure sia l’aria che l’acqua sono trasparenti alla luce visibile. Il fatto che nell’acqua di mare sono presenti ioni salini. Questi sono troppo pesanti perché possano seguire le rapidissime vibrazioni della luce visibile, alla quale perciò non sottraggono energia e questa passa: l’acqua di mare è trasparente alla luce visibile. (Naturalmente ogni mezzo materiale attenua gradualmente l’intensità della luce per diffusione). Invece, siccome la frequenza delle onde radar è bassa, gli ioni salini possono entrare in risonanza e assorbono l’emergia delraggio radar: l’acqua del mare è opaca al radar.
I metalli, invece, avendo elettroni liberi di massa migliaia di volte minore di quella di un atomo, possono entrare in risonanza anche con la luce visibile e perciò sono opachi a tutte le onde elettromagnetiche, dalle onde radio alla luce ultravioletta. I metalli dovrebbero essere trasparenti ai raggi X e ai raggi γ, perché la loro frequenza è così alta che neanche i leggeri elettroni sono in grado di oscillare in risonanza con essi. Eppure, tranne che per spessori estremamente piccoli, i metalli

sono opachi ai raggi X e γ. Ciò è dovuto a un altro meccanismo: i raggi X e γ hanno energie così alta da perdere energia per effetto fotoelettrico interno e per effetto "Compton"[1]

Alcuni *perché*.

1) **Un corpo** che perde energia (per attrito, irraggiamento o altro) rallenta; perché un satellite artificiale che perde energia per attrito con gli alti strati dell'atmosfera accelera?
   Come sapete, perdendo energia, finisce per cadere sulla Terra.
   Anche un insieme di elettroni accelerati irradia (e quindi perde) energia, per esempio in un'antenna radiotrasmittente; l'energia irradiata deve essere continuamente rifornita all'antenna dal generatore a radiofrequenza perché l'antenna continui a funzionare.
   Perché invece un elettrone periferico di un atomo, pur muovendosi di moto accelerato secondo il modello do Bohr, non irradia finendo per cadere sul nucleo?
2) **Perché** un corpo più freddo non cede calore a un corpo più caldo? Il fatto violerebbe qualche principio fondamentale?
3) **Perché** una pentola piena d'acqua posta sul fuoco prima o poi bolle (mai che ghiacci)?
4) **Perché** un sasso abbandonato a se stesso cade verso il pavimento e mai verso il soffitto? Sono così diversi i due casi, della pentola e del sasso?
5) **L'urto** tra due corpi macroscopici è sempre più o meno anelastico; perché l'urto tra due atomi è rigorosamente elastico a bassa energia e diventa anelastico ad alta energia? Quanto deve essere *grande* questa alta energia?
6) **Noi** possiamo percepire un oggetto con l'udito, se esso emette un suono, con la vista se emette Luce:
   Perché lo localizziamo molto meglio con la vista che con l'udito?
7) **Perché** si parla comunemente di *onde* sonore e non di *raggi* sonori? Perché viceversa si parla di *raggi* luminosi e non di *onde* luminose? (Raggi X, raggi γ, però microonde, onde radio. Eppure si tratta in ogni caso di radiazione elettromagnetica: sapreste interpretare questa terminologia linguistica?).
8) **I fotoni,** vanno a velocità massima c, perché hanno massa zero. Un fotone non può esistere se non va a velocità c.
   Come si spiega che la luce in un mezzo materiale (trasparente) va a velocità $v=c/n < c$?
   (n è l'indice di rifrazione del mezzo).
9) **In un prisma** un fascio di luce bianca si decompone nelle varie componenti monocromatiche (diverse lunghezze d'onda). **Come mai?**

[1] Vedi O. Serra: "Teoria dei quanti", annuario del Liceo Scientifico Scorza o il mio sito digilander.libero.it/ottavioserra0