Ottavio Serra

Il campo magnetico come correzione relativistica del campo elettrostatico.

a. La forza di Lorentz.

[0] $$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

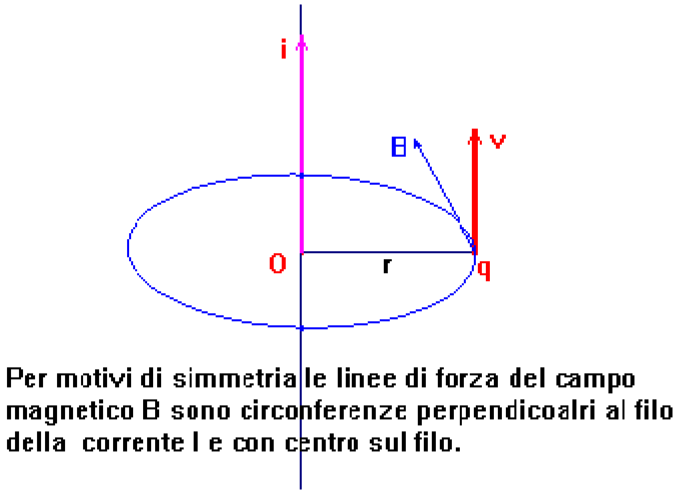
$\vec{E}$ è il campo elettrostatico che si manifesta su una carica q indipendentemente dal suo stato di moto, $\vec{B}$ è il "campo magnetico" che agisce su una carica q solo quando questa è in moto e che si definisce tramite la [1] dopo aver dedotto la forza "elettrica". La "pura forza magnetica" sarebbe

[1] $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ e $\vec{B}$ si determina misurando la forza nelle varie direzioni.

L'unità di misura (del modulo) di **B** è chiaramente Ns/(mC) = Nms(m^2C) = Js/(m^2C)=VCs/(m^2C) =Vs/m^2 =Wb/m^2. (Come è d'uso).

Dopo Oersted, Ampère, Faraday, sappiamo che una corrente I rettilinea (indefinita) produce una forza su una carica q in moto con velocità v e le cose vanno come se nello spazio circostante il filo percorso da corrente ci fosse un "campo magnetico" $\vec{B}$ avente direzione perpendicolare alla corrente, verso tale che il vettore forza sia diretto verso il filo di corrente quando q>0 e v è parallela e concorde con la corrente e il cui modulo è

[2] $$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$$ (legge di Biot e Savart. Vedi figura sottostante).

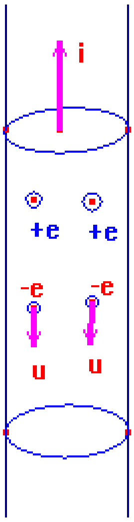


In forma vettoriale,

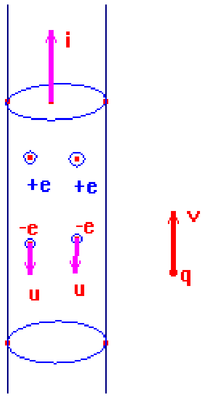
[3] $$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{i} \times \vec{r}}{r^2}$$

Ma ora si pone la domanda fondamentale: da dove spunta fuori il campo magnetico?
La risposta è: dalla relatività di Einstein. Vediamo.

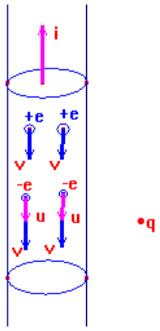
b. Per prima cosa dobbiamo capire il legame tra corrente elettrica e moto degli elettroni di conduzione. In un filo rettilineo percorso da una corrente i ci siano n elettroni di conduzione per unità di volume che si muovono con velocità u in senso contrario ad i. La densità volumica di carica di conduzione è $\rho^- = ne^-$ e la corrente i sarà $i = \rho^- Su = ne^- Su$, essendo S la sezione del filo. Vedi la figura seguente.



Naturalmente il filo globalmente è neutro.
Ponendo $\lambda = \rho S$ (densità lineare di carica), si può scrivere $i = \lambda u$. Nel caso degli elettroni di conduzione $i = \lambda^- u^-$. Se ci sono anche cariche positive di conduzione, come in una soluzione elettrolitica, la corrente $i = \lambda^- u^- + \lambda^+ u^+$. Nel caso di un filo metallico la conduzione è puramente elettronica.
Vediamo ora che succede se una carica elettrica, posta a distanza r dal filo (dall'asse del filo), si muove con una velocità avente componente v parallelamente al filo. Per fissare le idee, supponiamo q>0 e v concorde con i.



Per il principio di relatività possiamo considerare la carica q ferma ed elettroni (-e) e ioni positivi corrispondenti (+e) in moto verso il basso con velocità rispettivamente u+v e v (in modulo).



Per la “contrazione delle lunghezze” la densità lineare di carica sarà diversa per quelle negative e per quelle positive, il filo non appare più neutro alla carica q (voglio dire in un riferimento in cui la carica q è ferma) e questa sarà soggetta a una forza che classicamente non esisterebbe. Precisamente, essendo λ=q/l, per le cariche negative la lunghezza l è vista come $l' = l\sqrt{1-\frac{(u+v)^2}{c^2}}$, per le positive come $l'' = l\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ e le densità lineari saranno

$\lambda^- = \frac{-\lambda}{\sqrt{1-\frac{(u+v)^2}{c^2}}}$ $\lambda^+ = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, dove λ è il valore assoluto della densità lineare di carica elettronica uguale alla densità lineare di carica positiva in un sistema di riferimento in cui la carica q è ferma. **Si vede che λ^- è maggiore in valore assoluto di λ^+ .**

Siccome un filo elettrizzato con densità lineare λ genera un campo radiale (ortogonale al filo) di modulo $E_0 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ (applicare il teorema di Gauss) diretto verso il filo se λ è negativa, in verso opposto se λ è positivo, nel nostro caso E_0 è diretta verso il filo e su una carica positiva, come abbiamo supposto che sia q, agirà una forza diretta verso il filo di modulo $F=q.E_0$, cioè

$$F = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(u+v)^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)q$$

Siccome i=λu, approssimando inoltre i termini in parentesi con $1+\frac{1}{2}\frac{(u+v)^2}{c^2}$ e $1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$ perché u e u+v sono piccole rispetto a c, si ottiene

$$F = \frac{i}{2\pi\varepsilon_0 ru}\left(\frac{1}{2c^2}(u^2+2uv+v^2-v^2)\right)q = \frac{i}{4c^2\pi\varepsilon_0 ru}u(u+2v)q$$

e trascurando ancora u rispetto a v (la velocità degli elettroni di conduzione non supera qualche mm/s), si ha: $F = \frac{1}{2\pi c^2\varepsilon_0}\frac{i}{r}vq$ che coincide con la [1] ove si ponga $B = \frac{1}{2\pi c^2\varepsilon_0}\frac{i}{r}$ e questa coincide con la formula di Biot e Savart, se si pone $\mu_0 = \frac{1}{c^2\varepsilon_0}$.

Supponiamo ora che valga la meccanica classica (non relativistica), il ché si ottiene facendo tendere c all’infinito: la trasformazione di Lorentz tende alla trasformazione di Galilei e le formule della quantità di moto e dell’energia tendono a quelle classiche. Ma se c→∞, μ_0 →0 e non esiste campo magnetico.

c. Esisteva qualche teoria relativistica prima di Einstein? La risposta è *si*.

La teoria elettromagnetica di Maxwell (James Clerk Maxwell, Edimburgo 1831–Cambridge,1879) comprende i seguenti risultati:

(1) la componente elettrica del campo trasporta l'energia E, la componente magnetica la quantità di moto p=E/c, come si ricavò in seguito dalla dinamica relativistica;

(2) la velocità c delle onde elettromagnetiche nel vuoto è data da $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, essendo ε_0 e μ_0 rispettivamente la costante dielettrica del vuoto e la permeabilità magnetica del vuoto. Queste due costanti sono definite in termini statici che nulla hanno a ché vedere con lo stato di moto, quindi c è una velocità indipendente dal sistema di riferimento (inerziale), come postulato dalla teoria della Relatività. Inoltre in questo lavoro ho mostrato come il campo magnetico sia una correzione relativistica del campo elettrico. In particolare ho ricavato la permeabilità magnetica in funzione della costante dielettrica e della velocità della luce.

Che la teoria del campo elettromagnetico sia una teoria relativistica "ante litteram" dipende dal fatto che essa tratta delle onde elettromagnetiche, che, guarda caso, si muovono alla velocità c della luce, cioè a una velocità che, (ci mancherebbe altro!), non è trascurabile rispetto a c.