Ottavio Serra

Elementi di dinamica relativistica

(Per maggiori dettagli vedi il mio articolo sul sito, cartella "Articoli Liceo scientifico Scorza".

(1) Quantità di moto

$$p = \gamma mv, essendo \ldots \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Alcuni scrivono

[1] $p = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} v = M(v).v$, avendo posto $M(v) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ (massa relativistica).

Per v→ 0 p → mv, cioè alla quantità di moto della meccanica classica.

(2) Energia

Per l'energia cinetica K si trova il seguente risultato: $K = m.c^2(\gamma - 1)$.

Per chi conosce il calcolo integrale, la formula si dimostra come segue.

Per la seconda legge di Newton, F = m.a, essendo a=dv/dt, perciò $F = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt} \equiv \frac{dp}{dt}$,

perché m è costante. (è la massa classica).

Se ora sostituiamo m con M = M(v) avremo: $F = \frac{d(Mv)}{dt} = M\frac{dv}{dt} + v\frac{dM}{dt}$, da cui segue

$$K = \int_0^v F.dx = \int_0^v Mv.dv + v^2.dM .$$

Inoltre, da $M = m/\sqrt{1-v^2/c^2}$, si ha: $M^2c^2 - M^2v^2 = m^2c^2$, da cui differenziando e dividendo per 2M si ottiene $c^2dM - v^2dM - M.v.dv = 0$ e infine

$K = \int_0^v c^2 dM = c^2M(v) - c^2M(0) = c^2(M-m) = (\gamma - 1).mc^2.$

L'approssimazione non relativistica.

Se v è molto piccola rispetto a c ,o in modo equivalente, se c tende all'infinito, γ tende a 1 e la quantità di moto p = γmv tende alla quantità di moto classica mv.

La stessa drastica approssimazione non si può fare per l'energia cinetica (perché?). Si osservi però che

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \cong \frac{1}{1-\frac{v^2}{2c^2}} \cong 1+\frac{v^2}{2c^2}$ e pertanto $K = \frac{1}{2}m.v^2$, che è la formula classica.

Un'osservazione estremamente importante è la seguente. Se invece di K consideriamo la grandezza $E = \gamma mc^2$, E appare la somma dell'energia di moto K e del termine mc^2, detto energia di quiete. Ma c'è di più. Come l'intervallo spazio-temporale $ds = \sqrt{(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2} = d\tau$ è un invariante relativistico perché rappresenta il tempo proprio, è un invariante anche

[2] $$(E)^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2 ,$$

perché m e c sono invarianti.

Dalla **[2]** segue intanto che in meccanica relativistica, se p si conserva, anche E (energia totale relativistica) si conserva, a differenza della meccanica classica in cui si può avere conservazione della quantità di moto e non dell'energia, come in un urto anelastico. In un urto anelastico si sviluppa energia di quiete, che compensa la diminuzione dell'energia di moto K.

Si noti ancora che da $E = \gamma mc^2, p = \gamma mv$ segue

[3] $$\frac{E}{p} = \frac{c^2}{v} .$$

In particolare per i fotoni, essendo **v = c**, segue **E=pc** e dalla [2] m=0. Vale anche il viceversa: se m=0, allora E = pc e v=c.
Cioè, una particella va alla velocità della luce se e solo se la sua massa è zero.