CALCOLO 3 - 24/07/2006 A O.Serra

Esercizio 1. Siano

$f(x; y) = 2e^{2x}/(y + e^{2x})^2$ e per k in $(3;+\infty)$

$D_k = \{(x,y) | e^{2x} - 2 \le y \le e^{2x}; - e^{2x} + 2 \le y \le -e^{2x} + k \}$.

Si chiede

una rappresentazione grafica di Dk;

un cambiamento di variabili che semplifichi il calcolo dell'integrale di f(x; y) su D_k;

il valore dell'integrale di f(x; y) esteso a D_k.

Sia $D = \{(x,y) | e^{2x} - 2 \le y \le e^{2x}; - e^{2x} + 2 \le y \}$. Si chiede:

una rappresentazione grafica di D;

il valore dell'integrale di f(x; y) esteso a D.

Esercizio 2. Sia ω la forma differenziale definita da:

$$\omega(x; y) = \frac{x-3y}{x^2+9y^2}\,dx + \frac{3x+9y}{x^2+9y^2}\,dy.$$

Si chiede di

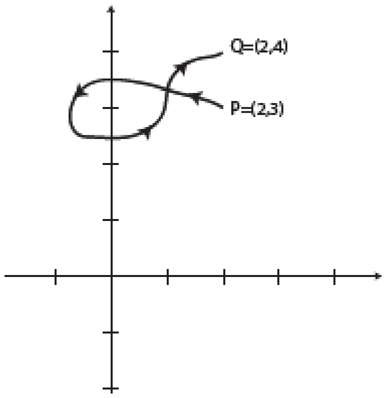
Calcolare l'integrale di ω(x; y) lungo la curva C paramentrizzata da γ(t) = (cos t; 1/3 sin t); $t \in [0; 2\pi]$.

Dire se e esatta nel suo dominio di definizione. (Motivare la risposta).

Dire se ω è esatta nell'insieme A ={(x,y)| y>2}. (Motivare la risposta).

Calcolare una primitiva di ω definita in A.

Calcolare l'integrale di ω lungo la curva disegnata in figura.



P=(2,3), Q=(2,4)

Esercizio 3.

Trovare la soluzione generale della seguente equazione differenziale:

$$y' = -\frac{2x}{1+x^2}\,y + \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

Tra le soluzioni della precedente equazione differenziale, trovare quella che soddisfa la seguente condizione: y(-1) = 0.

Esercizio 4.

Sia y(x) la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$y' = \arctan(-y^2+12y-35)$, $y(0) = 6$.

Senza calcolare esplicitamente la soluzione, si chiede di:

Studiare la monotonia di y(x).

Studiare la concavità e la convessità di y(x).

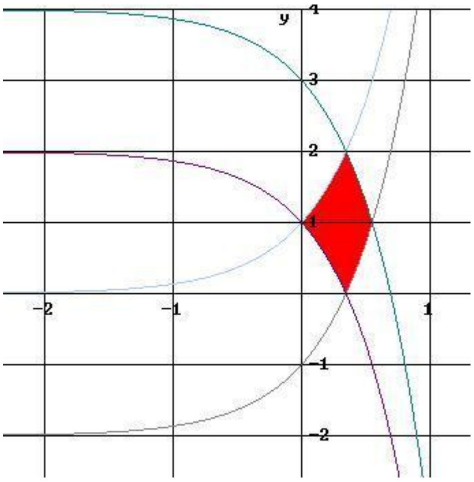
Dire se y(x) è limitata.

Studiare gli asintoti di y(x).

Esercizio 5.
Si consideri la funzione:
f(x) = log(3x + 4) :
Si chiede di
Scrivere il polinomio di Taylor di f di grado 4 e centrato nel punto x0 = 0.
Scrivere la serie di Taylor di f centrata in x0 = 0 e determinare l'insieme in cui questa serie converge.

Svolgimento.

Esercizio 1. D_k è il quadrilatero curvilineo in rosso



Posto u=e^{2x} – y, v= e^{2x} + y , segue 0≤ u ≤2, 2≤ v ≤k. 1/J = Det($2e^{2x}$, - 1; $2e^{2x}$, 1)= $4e^{2x}$;

J=1/$4e^{2x}$ = $\dfrac{1}{2(u+v)}$. Infine

$$I_k = \iint_{D_k} f(x,y)dxdy = \int_{D'_k} \frac{u+v}{v^2}\frac{1}{2(u+v)}dudv = \frac{1}{2}\int_0^2 du \int_2^k \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{k}.$$

D si ottiene da D_k per k→+∞ (D diventa una striscia illimitata a destra verso l'alto)

e l'ntegrale I = $\iint_D f(x,y)dxdy = \dfrac{1}{2}$.

Esercizio 2. Posto ω(x,y)=X(x,y)dxèY(x,y)dy, risulta:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{-3(x^2+9y^2)-(x-3y)18y}{(x^2+9y^2)^2} = \frac{-3x^2+27y^2-18xy}{(x^2+9y^2)^2};$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{3(x^2+9y^2)-(3x+9y)2x}{(x^2+9y^2)^2} = \frac{-3x^2+27y^2-18xy}{(x^2+9y^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial y},$$

perciò ω è chiusa nel suo dominio D_ω = $\boldsymbol{R}^2$-{(0,0)}.
Siccome D_ω non è semplicemente, non possiamo garantire che ω sia esatta.

Calcolo l'integrale $\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \dfrac{(\cos t - sent)(-sent) + (3\cos t + 3sent)(\frac{1}{3}\cos t)}{\cos^2 t + sen^2 t} dt = 2\pi$.

Siccome γ si "avvolge" intorno alla "lacuna" (0,0) e l'integrale di ω su γ è diverso da zero, ω non è esatta in D_ω. Siccome A è semplicemente connesso, ω è esatta in A.
Una primitiva Φ(x,y) di ω in A si può calcolare lungo un cammino come P_0H+HP con P_0(0,3), H(x,3), P(x,y).

$$\Phi(x,y)=\int_0^x \frac{t-9}{t^2+81}dt+\int_3^y \frac{3x+9t}{x^2+9t^2}dt=[\frac{1}{2}\log(t^2+81)-\arctan(\frac{t}{9})]_0^x+[\arctan(\frac{3t}{x})+\frac{1}{2}\log(x^2+9t^2)]_3^y$$

=log(x^2+81)/2-arctan(x/9)-log(81)/2 + arctan(3y/x)+log(x^2+9y^2)/2 – arctan(9/x) – log(x^2+81)/2 +C=
= log(x^2+9y^2)/2 +arctan(3y/x) –log(81)/2 –(arctan(x/9)+ arctan(9/x))+C =
log(x^2+9y^2)/2 +arctan(3y/x) +c' (perchè arctan(x/9)+ arctan(9/x) è una costante: quanto vale?).
Siccome la curva l disegnata in figura , da P(2,3) a Q(2,4) cade in A in cui ω è esatta,

$$\int_l \omega=\Phi(2,4)-\Phi(2,3)=\frac{1}{2}\log(4+144)+\arctan(6)-[\frac{1}{2}\log(4+81)+\arctan(9/2)]=$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{148}{85}+\arctan(6)-\arctan(\frac{9}{2}) \;=\; \frac{1}{2}\log\frac{148}{85}+\arctan(\frac{3}{56})\ .$$

Esercizio 3.

Equaz. diff. Lineare. Un fattore integrante è μ(x) = $e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}=1+x^2$. Perciò d[y(1+$x^2$)]/dx = 1/x,
y(1+x^2) = log|x|+c. $y(x)=\dfrac{\log|x|+c}{1+x^2}$. Con la C.I. y(-1)=0 c=0, la soluzione del problema di Cauchy è $y(x)=\dfrac{\log|x|}{1+x^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\log x^2}{1+x^2}$

Esercizio 4. La y' = f(x,y)= arctan(-y^2+12y-35)>0 se -y^2+12y-35>0, cioè se 5<y<7 e perciò la soluzione richiesta con y(0)=6 cade in questo intervallo, sarà crescente.
La y'' = $\dfrac{-2y+12}{1+(-y^2+12y-35)^2}.y'>0$ per y<6, perciò y(x) è convessa per y<6, concava per y>6, ha un flesso per y=6.
Siccome f(x,y) è continua con la derivata parziale rispetto a y su tutto ***R***, per ogni condizione iniziale il problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione e siccome y=5 e y=7 sono soluzioni particolari (costanti) la nostra soluzione non può uscire dalla striscia 5<y<7 e risulta limitata. Asintoti orizzontali. $\lim_{x\to+\infty} y=\alpha, 6<\alpha<7$, $\lim_{x\to+\infty} y'=0$. Perciò 0 = arctan(-α^2+12α-35) → α =5 o α=7 e perciò α=7. Analogamente, $\lim_{x\to-\infty} y=5.$

Esercizio 5. f(x)=log(3x+4)=log[4.(1+3x/4)] = log4 + [(3x/4) - $(3x/4)^2$/2 + $(3x/4)^3$/3 - $(3x/4)^4$/4].
La serie di Taylor è log4+$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(3x/4)^n}{n}$ che converge assolutamente per -1<(3x/4)<1, cioè per -4/3 < x <4/3. Per x=4/3 la seie si riduce alla serie armonica a segni alterni e converge, ma non assolutamente, per il criterio di Leibniz. Per x>4/3 la serie è indeterminata, per x≤ -4/3 la serie diverge negativamente. In definitiva la serie converge nell'intervallo chiuso a destra (-4/3, 4/3].