Appello di calcolo 3 (19 luglio 2005) A O.Serra

CALCOLO 3 – 19/07/05

Esercizio 1 – Siano

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{27x(y-x)^2}}\,dxdy\ .$$

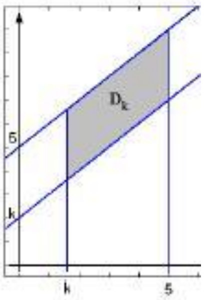
e per ogni $0 < k < 5$

$$D_k = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\ :\ k \le x \le 5,\ k \le y - x \le 5\}.$$

Si chiede

una rappresentazione grafica di D_k;

Svolgimento



Un cambiamento di variabili per calcolare l'integrale di f su D_k.

Si ponga x=u, y-x=v: risulta $k \le u \le 5$, $k \le v \le 5$. Il parellelogrammo D_k diventa un quadrato.

L'inverso dello Jacobiano è $1/J=\delta(x,y)/\delta(u,v)=1$, perciò J=1 e

$$I_k = \int_k^5 \frac{1}{3}\frac{du}{\sqrt[3]{u}} \int_k^5 J\,\frac{dv}{\sqrt[3]{v^2}} = \frac{1}{3}\frac{3}{2}(\sqrt[3]{5^2} - \sqrt[3]{k^2}).3(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{k})$$

Sia D l'insieme che si ottiene da D_k per $k \to 0$. Si calcoli l'integrale ***I** di* f su D.

D si ottiene dal parallelogrammo D_k arretrando il lato di sinistra sull'asse y; perciò

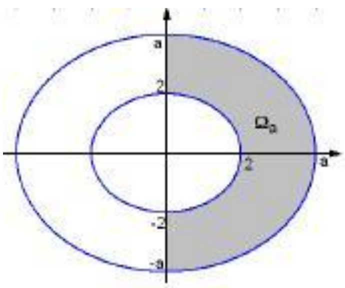
$\boldsymbol{I}$=Lim($k \to 0$) $\boldsymbol{I_k}$ =15/2.

Sia D definito come sopra e, per $a > 2$, sia $\Omega_a \subset \mathbf{R}^2$ il seguente insieme:

$$\Omega_a := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2\ :\ x \ge 0,\ 4 \le x^2 + y^2 \le a^2\}.$$

Determinare a in modo tale che l'area di Ω_a sia uguale all'area di D.

Svolgimento



L'area di D=25 deve essere uguale all'area di mezza corona circolare, perciò $\pi(a^2-4)/2=25$, da cui segue $a = \sqrt{\frac{50}{\pi} + 4}$.

Esercizio 2 – Sia

$$\omega(x,y) = (\log(2xy) + 1 + 2y)\ dx \ + \ \left(\frac{x}{y} + 2x\right)\ dy\ .$$

si chiede:

indicato con D il dominio di definizione di ω, qual é D e disegnarlo.

Svolgimento

La forma differenziale è definita in

$$D = \{(x,y) \in R^2 | 2xy > 0\}$$

ovvero

$$D = \{(x,y) \in R^2 | x > 0\ ,\ y > 0\} \cup \{(x,y) \in R^2 | x < 0\ ,\ y < 0\}.$$

D è pertanto l'unione del 1° e del 3° quadrante, privati dei bordi, gli assi cartesiani.

Verificare che $\omega(x,y)$ è chiusa.

$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{2x}{2xy} + 2 = \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{y} + 2$, dunque la forma differenziale è chiusa (il corrispondente campo vettoriale è irrotazionale), condizione necessaria di integrabilità.

Verificare se $\omega(x,y)$ è esatta in A={(x,y), x>0 e y>0}.

Siccome A, parte destra di D, è semplicemente connessa, la forma è esatta (ammette primitiva).

Trovare una primitiva di $\omega(x,y)$ in A.

Una primitiva di $\omega(x,y)$ è una funzione $\Phi(x,y) \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} = X(x,y), \frac{\partial \Phi}{\partial y} Y(x,y) \right.$, perciò

$\Phi(x,y) = \int X(x,y)dx + h(y)$, oppure $\Phi(x,y) = \int Y(x,y)dy + g(x)$.

Quest'ultima, nel nostro caso, è più comoda, perciò

$$\Phi(x,y) = \int (\frac{x}{y} + 2x)dy + g(x) = x\log(y) + 2xy + g(x)$$

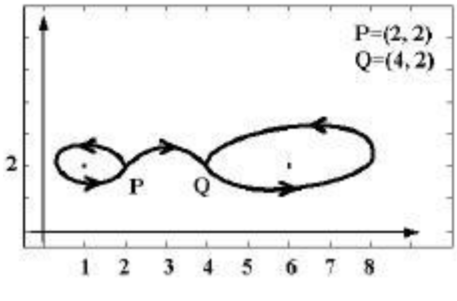
e imponendo che $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \log(2xy) + 1 + 2y$, si ottiene **log**(y)+2y+g'(x)= **log**(2xy)+1+2y, da cui g'(x)=1+ **log**(2x), e integrando g(x)=x+x**log(2)+xlog**(x)-x = x**log**(2x) e infine

$$\Phi(x,y) = x\log(y) + 2xy + xlog(2x) = x\log(2xy) + 2xy$$

Considerata la seguente forma differenziale

$\varpi(x,y) = [\log(2xy) + 1 + 2y - \frac{y-2}{(x-1)^2 + (y-2)^2}]dx + [\frac{x}{y} + 2x + \frac{x-1}{(x-1)^2}]dy$,

calcolarne l'integrale lungo la curva C disegnata qui sotto, percorsa una sola volta nel verso indicato, da P a Q.



La forma $\varpi(x,y)=\omega(x,y)+\omega_1(x,y)$, cioè è la somma della forma differenziale testè studiata e della forma differenziale standard di avvolgimento intorno al punto singolare (1,2). Quest'ultima è chiusa in tutto il piano privato del punto(1,2) ed è esatta nel piano dopo averlo tagliato con una opportuna semiretta che impedisca di girare intorno al punto singolare, per esempio la semiretta y=2, x<=1. Siccome la curva C sta in A (primo quadrante), l'integrale di ω è zero lungo entrambi gli anelli di C, l'integrale di ω_1 è zero lungo l'anello di destra, 2π lungo l'anello di sinistra. Dopo il taglio di cui sopra un primitiva di ω_1 è arctan[(y-2)/(x-1)], come è noto dalla teoria e come sarebbe facile ricavare, e siccome i punti P e Q della curva C hanno entrambi ordinata 2, ω_1 non contribuisce ulteriormente all'integrale. Perciò

$\int_C \varpi(x,y)=2\pi+\Phi(4,2)-\Phi(2,2)$ = 2π+[4log(2.4.2)+2.4.2]-[2log(2.2.2)+2.2.2] =

2π+16log2+16-6log2-8 = 2π+10log2+8.

Esercizio 3. Trovare la soluzione della seguente equazione differenziale: $e^{2y-x}y'-2x=0$, con y(1)=2. Dire poi, giustificando la risposta, se la soluzione trovata è globale.

Separando le variabili, si ha $\frac{1}{2}e^{2y}=\int 2xe^x dx=2(xe^x-e^x)+c$ e quindi y=(1/2)log[$4e^x$(x-1)+c].

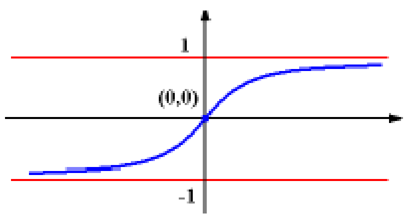
La condizione iniziale impone 2=(1/2)log[c] da cui c=e^4 e infine y=(1/2)log[$4e^x$(x-1)+e^4].
L'equazione differenziale si può scrivere y'(x)=f(x,y)=2x/e^{2y-x} definita e continua per ogni x di ***R*** ; anche f'_y =2xe^x.(-2/e^{2y})=-4x/e^{2y-x} è continua per ogni x. Perciò il problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione per ogni punto iniziale. La soluzione trovata è poi globale se, come f(x,y), essa è definita per ogni x. Ciò richiede che $4e^x$(x-1)+e^4 sia maggiore di zero per ogni x. Così è. Infatti , posto g(x)=e^x(x-1)+1, g'(x)=e^x(x-1)+e^x=x e^x >=0 per x>=0; perciò g(x) ha minimo (assoluto) 0 per x=0 e lo stesso dicasi di $4e^x$(x-1)+4. Siccome e^4>4, $4e^x$(x-1)+e^4>0 per tutti gli x. La soluzione è globale.

Esercizio 4. Data l'equazione differenziale $y'=e^{x^2}(1-y^2)$, con y(0)=0, si chiede
se la soluzione è limitata;
di studiare la monotonia;
di disegnare un grafico della soluzione;
se la soluzione è globale.

Esercizio abbastanza semplice. Siccome $f(x,y)=e^{x^2}(1-y^2)$ è continua per ogni x così come la derivata di f rispetto a y: $\frac{\partial f}{\partial y}=-2y.e^{x^2}$, il problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione per ogni condizione iniziale (a,b). in particolare per (a,b)=(0,0). Inoltre, y= 1 e y= −1 sono soluzioni, perciò la soluzione passante per (0,0) è limitata. La derivata seconda

$$y''(x)=2xe^{x^2}(1-y^2)-e^{x^2}2yy'=2xe^{x^2}(1-y^2)-2ye^{x^2}.e^{x^2}(1-y^2)=$$

$2e^{x^2}(1-y^2).(x-ye^{x^2})$ si annulla per (x,y)=(0,0), perciò la soluzione ha un flesso in O(0,0).



ed è globale.

Esercizio 5. Calcolare con gli sviluppi di Taylor a= $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(3x).sen(6x)}{1-\cos x}$

e b= $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(3x)-sen(3x)}{sen^3(x/2)}$.

Risulta

$$a=\lim_{x\to 0}\frac{3x.6x}{\frac{1}{2}x^2}=36;$$

$$b=\lim_{x\to 0}\frac{(3x-\frac{1}{3}27x^3+...)-(3x-\frac{1}{3!}27x^3+...)}{(x/2-...)^3}=\frac{-9/2}{1/8}=-36.$$