CALCOLO 3 - 18/12/2006 Compito A O.Serra

Esercizio 1.

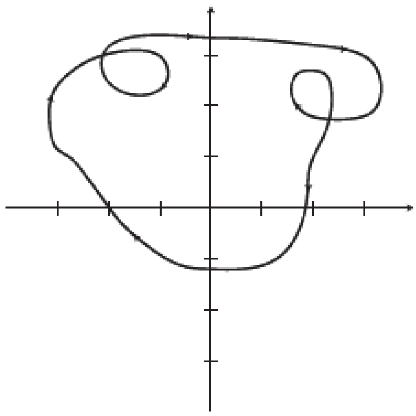
Siano $f(x; y) = xy^3e^{-2y2} /(x^2 + y^2)^2$ e $D_k = \{(x; y): 0 < x^2 + y^2 < k^2; 0 < y < x\}$ per k in $(0;+\infty)$.
Si chiede una rappresentazione grafica di D_k;
un cambiamento di variabili che semplifichi il calcolo dell'integrale di f(x; y) su D_k;
il valore dell'integrale di f(x; y) esteso a D_k;
Sia D il seguente dominio:
D = {(x; y): 0 < y < x}. Dare una rappresentazione grafica di D;calcolare l'integrale di f esteso a D.

Esercizio 2.

Sia ω la forma differenziale definita da:

$$\omega(x; y) = \left[\frac{xy^2}{x^2+3} - \frac{y-2}{x^2+y^2-4y+4}\right]dx + \left[\frac{x}{x^2+y^2-4y+4} - y\log\left(\frac{1}{x^2+3}\right)\right]dy\ .$$

Determinare il dominio di definizione di ω e disegnarlo.
Dire se ω è esatta nel dominio A := {(x; y)| x > 1}. (Motivare la risposta)
Calcolare una primitiva di ω in A.
Dire se ω è esatta nel suo dominio di definizione. (Motivare la risposta)
Calcolare l'integrale di ω lungo la curva disegnata in figura (percorsa una volta).



Esercizio 3.

Trovare la soluzione generale della seguente equazione differenziale y' = y(1 - 4y).
Trovare la soluzione che soddisfa la condizione y(0) = 1/5.

Esercizio 4. Dire se la seguente equazione differenziale:

$y' = e^{y^2-25} - 1$ ammette delle soluzioni constanti e in caso affermativo determinarle.

Sia y(x) la soluzione del seguente problema di Cauchy: $y' = e^{y^2-25} - 1$, y(0) = 6.
Senza calcolare esplicitamente la soluzione, si chiede di
Studiare la monotonia di y(x).
Studiare la concavità/convessità di y(x).
Dire se y(x) possiede asintoti orizzontali e in caso affermativo determinarli.

Esercizio 5.

Si consideri la funzione: $f(x) = xe^{-2x}$.
Scrivere il polinomio di Taylor di f di grado 4 centrato nel punto $x_0 = 0$.
Scrivere la serie di Taylor di f centrata in $x_0 = 0$ e determinare l'insieme di convergenza.

Svolgimento.

Esercizio 1.

D_k è il primo ottante del cerchio di centro O(0,0) e raggio k. Passando a coordinate polari x=rcost, y=rsent, (Jacobiano J=r), si ottiene:

$$\iint_{D_k} \frac{xy^3e^{-2y^2}}{(x^2+y^2)^2}dxdy = \iint_{D'_k} \frac{r\cos t.r^3sen^3t.e^{-2r^2sen^2t}}{r^4}rdrdt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt(\cos t.sen^3t)\int_0^k e^{-2r^2sen^2t}r.dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt(\cos t.sen^3t)\int_0^{-2k^2sen^2t} e^z \frac{dz}{-4sen^2t} =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dt(\cos t.sent).(-\frac{1}{4})(e^{-2k^2sen^2t}-1) = \int_0^{-k^2} \frac{-dz}{4k^2}(\frac{-1}{4})(e^z-1) = \frac{1}{16k^2}[e^z-z]_0^{-k^2} = \frac{e^{-k^2}+k^2-1}{16k^2}.$$

D è il 1° ottante del piano cartesiano (compreso tra il semiasse positivo delle x e la retta y=x) e si ottiene da D_k per k→+∞. Perciò il corrispondente integrale si ottiene dal precedente per k→+∞ e vale $\frac{1}{16}$.

Esercizio 2.

ω(x,y)=ω_1(x,y)+ω_2(x,y),

essendo ω_1(x,y)= $\left[\frac{xy^2}{x^2+3}\right]dx+\left[-y\log(\frac{1}{x^2+3}\right]dy=\left[\frac{xy^2}{x^2+3}\right]dx+\left[y\log(x^2+3)\right]dy$,

ω_2(x,y)= $\left[-\frac{y-2}{x^2+y^2-4y+4}\right]dx+\left[\frac{x}{x^2+y^2-4y+4}\right]dy$.

ω_1(x,y) è definita in tutto $\boldsymbol{R}^2$ ed è chiusa perché $\frac{\partial X_1}{\partial y}=\frac{2xy}{x^2+3}=\frac{\partial Y_1}{\partial x}$;

ω_2(x,y) è definita in $\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,2)\}$ ed è chiusa perché $\frac{\partial X_2}{\partial y}=\frac{\partial Y_2}{\partial x}=\frac{-x^2+(y-2)^2}{[x^2+(y-2)^2]^2}$.

N.B. ω_2(x,y) è una forma di avvolgimento intorno al punto critico (0.2).

Si conclude che ω(x,y)=ω_1(x,y)+ω_2(x,y) è chiusa nel suo dominio di definizione D_ω=$\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,2)\}$.

ω(x,y) non è esatta in D_ω a causa di ω_2 il cui integrale lungo una qualsiasi curva regolare chiusa intorno a (0,2), percorsa in senso antiorario, vale 2π.

E' invece esatta in A, sottoinsieme di D_ω semplicemente connesso.

Una primitiva di ω in A è Φ(x,y)=Φ_1(x,y)+Φ_2(x,y).

Φ_1(x,y)= $\int_{(0,0)}^{(x,0)} \omega_1(t,0)dt+\int_{(x,0)}^{(x,y)} \omega_2(x,t)dt = \int_0^x 0.dt+\int_0^y t.\log(x^2+3)dt = 0+\frac{1}{2}y^2(x^2+3)$.

Φ_2(x,y)= $\arctan\frac{y-2}{x}$, come si sa dalla teoria e come del resto si ricava facilmente:

Intanto osserviamo che ω(x,y) è esatta in D_ω privato di una semiretta di origine (0,2) che lo renda semplicemente connesso, per esempio la semiretta {y=2, x≤0}. Perciò

Φ_2(x,y)= $\int_{(0,0)}^{(x,0)} \frac{2}{t^2+4}dt+\int_{(x,0)}^{(x,y)} \frac{x}{x^2+(t-2)^2}dt = [\arctan\frac{t}{2}]_0^x+[\arctan\frac{t-2}{x}]_0^y$

$=\arctan\frac{x}{2}+\arctan\frac{y-2}{x}+\arctan\frac{2}{x} = \arctan\frac{y-2}{x}+\frac{\pi}{2} = \arctan\frac{y-2}{x}$ a meno di una costante.

Siccome la curva è percorsa in senso orario intorno a (0,2), l'integrale vale -2π. A tale integrale contribuisce solo la forma di avvolgimento ω_2; ω_1 dà contributo nullo, essendo esatta in D_ω.

Esercizio 3.

L'equazione differenziale si può scrivere

$\frac{dy}{y(1-4y)} = dx \Rightarrow \int (\frac{1}{y} + \frac{4}{1-4y})dy = \int dx \Rightarrow \log|x| - \log|1-4y| = x + c$ da cui segue

$\left|\frac{y}{1-4y}\right| = Ae^x$, avendo posto $e^c = A$.

La condizione iniziale y(0) = 1/5 implica A=1, perciò la soluzione particolare è

$$\frac{y}{1-4y} = e^x \Rightarrow y = \frac{e^x}{4e^x + 1}.$$

Esercizio 4.

Le soluzioni costanti, y'(x) = 0, sono y=5 e y=-5.

Le soluzioni sono crescenti nei semipiani y>5 e y<-5, perciò la soluzione relativa alla condizione iniziale y(0)=6 è crescente.

La derivata seconda y'' = $e^{y^2-25}2y.y' = e^{y^2-25}2y(e^{y^2-25}-1)$ è >0 (e quindi y(x) è convessa) per y>5 o per -5<y<0, perciò la soluzione che ci interessa è convessa.

La soluzione richiesta sta nel semipiano y>5 ed è crescente, perciò un eventuale asintoto orizzontale si ha per $x \to -\infty$ e $y' \to 0$, da cui segue y=-5 (escluso) oppure y=5 (accettato).

Esercizio 5.

La serie di Taylor di f(x) si ottiene moltiplicando per x la serie di e^{-2x}, perciò risulta

T(0,x)= $x.\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{2^k}{k!}x^{k+1}$.

Il polinomio di 4° grado è $P^{(4)}(0,x) = x-2x^2+2x^3-(4/3)x^4$.

La serie converge assolutamente su tutto ***R***, come discende dalla conoscenza della serie esponenziale e come facilmente segue dal criterio del rapporto.