CALCOLO 3 - 12/04/2007 A O.Serra

Esercizio 1.

Siano $f(x;y) = \dfrac{1}{(y+4x)^2\sqrt{y-x}}$ e, per $k \in (3,+\infty)$, $Dk = \{(x,y) \mid x+3<y<x+5, -2x+3<y<-2x+k\}$.

Si chiede:

una rappresentazione grafica di *Dk*;

un cambiamento di variabili che semplifichi il calcolo dell'integrale di $f(x;y)$ su *Dk*;

il valore dell'integrale di $f(x;y)$ esteso a *Dk*.

Sia *D* il seguente dominio:

$D = \{(x,y) \mid x+3<y<x+5; -2x+3<y\}$.

Si chiede:

una rappresentazione grafica di *D;*

di calcolare l'integrale di *f* esteso a *D.*

Esercizio 2.

Sia ω la forma differenziale definita da:

$$\omega(x,y) = [\frac{4x}{\sqrt{y+4x^2}} + 2y sen(2xy)]dx + [\frac{1}{2\sqrt{y+4x^2}} + 2x sen(2xy)]dy$$

Si chiede di

Determinare il dominio di definizione di $\omega(x,y)$ e disegnarlo.

Dire se $\omega(x,y)$ *è* chiusa. (Motivare la risposta)

Dire se $\omega(x,y)$ *è* esatta nel suo dominio di definizione. (Motivare la risposta)

Calcolare una primitiva di $\omega(x,y)$.

Determinare la primitiva di $\omega(x,y)$ che nel punto $P = (\pi; 0)$ assume il valore $1 + 2\pi$

Calcolare l'integrale di lungo la curva parametrizzata da $\gamma(t) = (t;-t^2 + 16)$, *t in* $[-4; 4]$.

Esercizio 3.

Trovare la soluzione generale della seguente equazione differenziale: $\mathbf{e}^{\log(y')-4x} = 1/3y^2$

Tra le soluzioni della precedente equazione differenziale, trovare quella che soddisfa la seguente condizione: $y(1/4) = 2$.

Esercizio 4.

Dire se la seguente equazione differenziale: $y' = y^3-4y$

ammette delle soluzioni constanti e in caso affermativo determinarle.

Sia $u(x)$ la soluzione del seguente problema di Cauchy: $u' = u^3-4u$, $u(0)=1$.

Dire se $u(x)$ è monotona e in caso affermativo dire se crescente o decrescente.

Sia $v(x)$ la soluzione del seguente problema di Cauchy: $v' = v^3-4v$, $v(0) = -1$.

Dire se $v(x)$ è monotona e in caso affermativo dire se crescente o decrescente.

Verificare che $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty}(v(x)$.

Esercizio 5.

Si consideri la funzione: $f(x) = 3 + \log(1 + 3x)$.

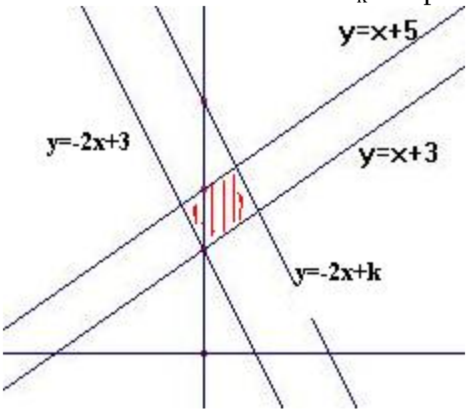
Si chiede di

Scrivere il polinomio di Taylor di *f* di grado 3 e centrato nel punto $x_0 = 0$.

Scrivere la serie di Taylor di *f* centrata in $x_0 = 0$ e determinare l'insieme in cui questa serie converge.

Soluzione

Esercizio 1. Il dominio D_k è il parallelogrammo tratteggiato in rosso.



Cambiamento di variabili: u=y-x, v=y+2x;   3<u<5, 3<v<k. Jacobiano : 1/J = Det(-1,1, 2,1)= -3, perciò |J|= 1/3. L'integrale richiesto vale dunque:

$$I_k = \iint_{D_k} f(x,y)dxdy = \int_{v=3}^{v=k} \frac{1}{v^2}dv \int_{u=3}^{u=5} \frac{1}{\sqrt{u}} |J| du = \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{v}\right]_3^k . \left[2\sqrt{u}\right]_3^5 = \frac{2}{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\frac{1}{3}-\frac{1}{k}) .$$

D si ottiene da D_k per k $\to +\infty$, perciò I= $\lim_{k\to+\infty} I_k = \frac{2}{9}(\sqrt{5}-\sqrt{3}).$

D si ottiene da D_k spostando sempre più avanti in alto (all'infinito) la retta y=-2x+k.
Il parallelogrammo D_k diventa una striscia aperta.

Esercizio 2.

Il dominio di questa forma è la regione di piano strettamente al di sopra della parabola $y = -4x^2$. (Dominio semplicemente connesso).

La forma ω(x,y) = ω₁(x,y) + ω₂(x,y) con ω₁(x,y) = $\frac{4x}{\sqrt{y+4x^2}}dx + \frac{1}{2\sqrt{y+4x^2}}dy$,

ω₂(x,y) = $2ysen(2xy)dx + 2xsen(2xy)dy$. Risulta:

$\frac{\partial X_1}{\partial y} = \frac{\partial Y_1}{\partial x} = \frac{-2x}{(y+4x^2)^{3/2}}$, perciò ω₁(x,y) è chiusa; $\frac{\partial X_2}{\partial y} = \frac{\partial Y_2}{\partial x} = 2sen(2xy) + 4xy(\cos(2xy)$, perciò ω₂(x,y) è chiusa. Si conclude che ω(x,y), somma di due forme chiuse, è chiusa.

Inoltre ω(x,y) è esatta perché è chiusa (condizione necessaria ma non sufficiente) in un dominio semplicemente connesso (condizione suficiente ma non necessaria).

Una primitiva di ω(x,y) = ω₁(x,y)+ ω₂(x,y) è Φ(x,y) = Φ₁(x,y)+ Φ₂(x,y), con

Φ₁(x,y) = $\int_1^x \frac{4t}{2t}dt + \int_0^y \frac{dz}{2\sqrt{z+4x^2}}dz = (2x-2) + (\sqrt{y+4x^2} - 2x) + k = \sqrt{y+4x^2} + c_1.$

Φ₂(x,y) = $\int_1^x 0.dt + \int_0^y 2xsen(2xz)dz = 2x.[\frac{-\cos(2xz}{2x}]_0^y = -\cos(2xy) + c_2$. Infine

Φ(x,y) = $\sqrt{y+4x^2} - \cos(2xy) + c.$

La primitiva che in P(π,0) assume il valore 1+2π è $\sqrt{y+4x^2} - \cos(2xy) + 2.$

Infine, l'integrale di ω(x,y) lungo l'arco di parabola $y=-x^2+16$ da (-4,0) a (4,0) è

I=Φ(4,0)-Φ(-4,0) = 0. N.B. I=0 lungo qualsiasi cammino da (-a,b) ad (a,b) che stia nel dominio di ω. Come mai?

Esercizio 3. L'equazione differenziale si può scrivere y' = $e^{4x}/3y^2$ (y e y' >0).

Segue $3y^2dy = e^{4x}dx$, $y=e^{4x}/4+c$ ovvero y(x) = $\sqrt[3]{\frac{e^{4x}}{4}+c}$. La condizione y(1/4)=2 implica c=8-e/4 per cui la soluzione particolare è y(x) = $\sqrt[3]{\frac{e^{4x}-1}{4}+8}$.

Esercizio 4.

f (x,y) = y^3-4y è continua con la derivata parziale rispetto a y in tutto $\boldsymbol{R}^2$, perciò il problema di Cauchy ammette una e una sola soluzione per ogni punto (a,b) del piano.
La y' è >0 per y>2 o per -2<y<0; è <0 per 0<y<2 o per y<-2.
Le funzioni costanti y=0, y=2, y=-2 sono soluzioni dell'equazione differenziale e per l'unicità la soluzione u(x), con la condizione u(0)=1, è decrescente e limitata nelle striscia 0<y<2; la soluzione v(x) con la condizione v(0)=-1, è crescente e limitata nella strscia -2<y<0.
Il limite per x→+∞ di u(x) = L ≥ 0 (ed L<1) e u'(x) tende a 0. Perciò 0=L^3-4L. L'unica soluzione accettabile è L=0. Analogamene, il limite per x→+∞ di v(x) è 0. Con ragionamento analogo si trova che il limite per x→-∞ di u(x) è 2, di v(x) è -2.
Le funzioni u(x) e v(x) per x→ +∞ tendono entrambe a zero.

Esercizio 5.

La serie di Tylor di $f(x)$ = 3 + log(1 + 3x) con punto iniziale 0 è

$$3+\frac{3x}{1}-\frac{9x^2}{2}+\frac{27x^3}{3}-\frac{81x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(3x)^n}{n}\ldots \quad [1]$$

Perciò il polinomio di 3° grado è

$$3+3x-\frac{9x^2}{2}+9x^3.$$

La serie [1] è assolutamente convergente per -1/3 < x < 1/3. Se x=1/3, è convergente per il criterio di Leibniz, ma non assolutamente convergente. Per x = -1/3 o x < -1/3 diverge a -∞.
Per x>1/3 è indeterminata (MaxLim = +∞, MinLim = -∞).
In definitiva, la serie converge nell'intervallo aperto a sinistra (-1/3, 1/3].

Complemento all'esercizio 4.

L'equazione differenziale y'=y^3 – 4y è risolubile in forma esatta.

La derivata y'' = ($3y^2$-4).y' = ($3y^2$ -4).(y^2 -4).y > 0 per $y\in(-2,-\sqrt{\frac{4}{3}})\cup(0,\sqrt{\frac{4}{3}})\cup(2,+\infty)$. Perciò le soluzioni sono convesse se y>2, concave se y< -2; invece le soluzioni come la u(x) hanno un flesso nel punto di ordinata $\sqrt{\frac{4}{3}}$, le soluzioni come la v(x) hanno un flesso nel punto di ordinata -$\sqrt{\frac{4}{3}}$.

L'integrazione dà $\log\left|\frac{y^2-4}{y^2}\right|=8x+c$. Distinguiamo ora i vari casi.

1) y^2>4. $1-\frac{4}{y^2}=e^{8x+c}\Leftrightarrow y^2=\frac{4}{1-Ae^{8x}}$. Siccome A=$e^c$ >0, le curve integrali avranno un asintoto verticale di equazione x=x_A = log(1/A)/8, perciò le soluzioni hanno dominio (-∞, x_A).

Se y>2, $y = \dfrac{2}{\sqrt{1-Ae^{8x}}}$, As Or. y=2. Se y< -2, $y = \dfrac{-2}{\sqrt{1-Ae^{8x}}}$, As. Or.y=-2.

2) $y^2<4$. $\dfrac{4}{y^2} - 1 = e^{8x+c} \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{4}{1+Ae^{8x}}$ e il dominio, come nel caso di u(x) e v(x), è $(-\infty, +\infty)$.

Se 0<y<2, come per u(x), $y = \dfrac{2}{\sqrt{1+Ae^{8x}}}$, asintoti orizzontali y=2, y=0.

Se -2<y<0, come per v(x), $y = \dfrac{-2}{\sqrt{1+Ae^{8x}}}$, asintoti orizzontali y=-2, y=0.

Nel grafico seguente sono rappresentate le curve integrali, i tre asintoti orizzontali (soluzioni costanti) e l'asintoto verticale comune per le ultime due.

$y = u(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+3e^{8x}}}$, [u(0)=1]; $y = v(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1+3e^{8x}}}$, [v(0)=-1];

$y = \dfrac{2}{\sqrt{1-\frac{3}{4}e^{8x}}}$, [y(0)=4]; $y = \dfrac{-2}{\sqrt{1-\frac{3}{4}e^{8x}}}$, [y(0)=-4]. Asintoto x=log(4/3)/8.