FACOLTA' di INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 27-01-2009 Compito D

I) Sia $T: R^3 \to R^4$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 5x_2 + 6x_3, x_1 + 2x_2 + 5x_3, 3x_2 + x_3, 2x_1 + 7x_2 + 11x_3).$$

Determinare:

a) una matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di R^4 e di R^3;
b) equazioni cartesiane di Ker(T), una base e la dimensione di Ker(T);
c) equazioni parametriche di Im(T), una base e la dimensione di Im(T);
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'immagine, attraverso T, del sottospazio $U: x_1 + 5x_2 + x_3 = 0$;
f) equazioni cartesiane del sottospazio W= Ker(T) $\cap U$, una base e la dimensione di W;
g) equazioni cartesiane del complemento ortogonale di Ker(T), una base e la dimensione.

II) a) Si discuta il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} kx + 2y + (k-2)z = k \\ -2x + kz = 0 \\ 4x + 2y - kz = -2 \end{cases}$$

b) Si risolva il sistema per k=0.

III) In R^3 sono dati il punto P(1, 2, 0), la retta $r \begin{cases} x - z - 3 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

Determinare:

a) il piano π passante per P e perpendicolare a r;
b) la retta s passante per P e parallela ad r;
c) se le rette s ed r sono complanari o sghembe;
d) i piani passanti per P e paralleli ad r;
e) la retta q passante per P, perpendicolare ed incidente ad r;
f) il sottospazio vettoriale di dimensione 1 parallelo ad r.

IV) Sia A l'operatore di R^3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare

a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) equazioni cartesiane degli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

Alcune risposte

II) a) Conviene permutare le righe: 2^a, 3^a, 1^a.
Per k = 2 il sistema è incompatibile.
Per k = -2 il sistema ha ∞^1 soluzioni: x = -λ, y = λ-1, z = λ.

Per k $\neq$ 2 e k $\neq$ -2 il sistema è determinato: $\begin{cases} x = \dfrac{k}{k-2} \\ y = \dfrac{2(1-k)}{k-2} \\ z = \dfrac{2}{k-2} \end{cases}$ .tt

b) Per k=0 si ottiene x = 0, y = -1, z = -1 o dalle formule precedenti o diretta,mente dal sistema.

IV) a) Autovalori: $\lambda = 1$ con m.a. 2; $\lambda = 2$ e 4 con m.a. 1.

b) Autospazi. U_1: $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, dim.=1 (perciò A non è diagonalzzabile);
Una base è$\{{}^t(1,0,0,0)\}$.
U_2: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3+x_4 = 0$, dim. =1 (ovvio). Una base: $\{{}^t(0,0,1,-1)\}$.
U_4: $x_1 = x_2 = 0$, $x_3-x_4 = 0$, dim. =1 (ovvio). Una base: $\{{}^t(0,0,1,1)\}$.

c) Siccome la m.g. dell'autovalore 1 è 1, mentre l'algebrica è 2, A non è diagonalizzabile.