FACOLTA' di INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 27-01-2009 **Compito C**

I) Sia $T: R^3 \to R^4$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_2 - x_3, x_1 + 2x_3, 2x_1 + 3x_2 + 3x_3, 3x_1 + 3x_2 + 5x_3).$$

Determinare:

a) una matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di R^4 e di R^3;
b) equazioni cartesiane di Ker(T), una base e la dimensione di Ker(T);
c) equazioni parametriche di Im(T), una base e la dimensione di Im(T);
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'immagine, attraverso T, del sottospazio $U: x_1 + 3x_3 = 0$;
f) equazioni cartesiane del sottospazio W= Ker(T) $\cap U$, una base e la dimensione di W;
g) equazioni cartesiane del complemento ortogonale di Ker(T), una base e la dimensione.

II) a) Si discuta il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} kx - 2y + 4z = k \\ x + k\,z = 0 \\ (k-2)x + y = -1 \end{cases}$$

b) Si risolva il sistema per k= -2.

III) In R^3 sono dati il punto P(1, 0, -3), la retta $r\begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases}$

Determinare:

a) il piano π passante per P e perpendicolare a r;
b) la retta s passante per P e parallela ad r;
c) se le rette s ed r sono complanari o sghembe;
d) i piani passanti per P e paralleli ad r;
e) la retta q passante per P, perpendicolare ed incidente ad r;
f) il sottospazio vettoriale di dimensione 1 parallelo ad r.

IV) Sia A l'operatore di R^3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinare

a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) equazioni cartesiane degli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

Alcune risposte

II) a) Conviene scambiare le righe: $2^a, 3^a, 1^a$.
Per k = -2/3 il sistema è incompatibile.
Per k = 2 il sistema ha ∞^1 soluzioni: x = 2λ, y = -1, z = -λ.
Per k ≠ -2/3 e k ≠2 il sistema è determinato:

$$[1]\quad \begin{cases} x = \dfrac{k}{3k+2} \\ y = \dfrac{-k^2-k-2}{3k+2} \\ z = \dfrac{-1}{3k+2} \end{cases}$$

b) Per k =.

N.B. Sostituendo k = 2 nella formula generale [1] si ha la soluzione x = ¼, y = -1, z = -1/8, che rientra nell'insieme delle ∞^1 soluzioni: x = 2λ, y = -1, z = -λ per λ = -1/8.

IV) a) Autovalori: λ = 3 con m.a. 2; λ = 2 e λ = 4 con m.a. 1.

b) Autospazi. U_3 ha equazioni $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; dim=2, una base è $\{{}^t(1,0,0,0), {}^t(0,0,0,1=\}$.
Siccome dim = m.a. =2, A è diagonalizzabile.
U_2 ha dim 1; una base è $\{{}^t(1,-2,1,1)\}$.
U_4 ha dim 1; una base è $\{{}^t(1,0,-1,-1)\}$.

c) $D = \begin{pmatrix} 3,0,0,0 \\ 0,3,0,0 \\ 0,0,2,0 \\ 0,0,04 \end{pmatrix}$ e una matrice diagonalizzante, cioè una base di autovettori di A per R^4,

che trasforma A in D ($D = P^{-1}AP$)

è P = $\begin{pmatrix} 1,0,1,1 \\ 0,0,-2,0 \\ 0,0,1,-1 \\ 0,1,1,-1 \end{pmatrix}$.