FACOLTA' di INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 17-02-2009 **Compito B**

I) Sia $T : R^3 \to R^4$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_2 + 2x_3, 2x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3).$$

Determinare:

a) una matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di R^4 e di R^3;
b) equazioni cartesiane di Ker(T), una base e la dimensione di Ker(T);
c) equazioni parametriche di Im(T), una base e la dimensione di Im(T);
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'immagine, attraverso T, del sottospazio $U : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$;
f) equazioni cartesiane del sottospazio W= Ker(T) $\cap U$, una base e la dimensione di W;
g) equazioni cartesiane del complemento ortogonale di Ker(T), una base e la dimensione.

II) a) Si discuta il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} -8x + 3y + 2z = k \\ kx + 2y = 2 \\ 2k^2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}$$

b) Si risolva il sistema per k=2.

III) In R^3 sono dati il punto P(-1, 0, 2), la retta $r \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z + 4 = 0 \end{cases}$

Determinare:

a) il piano π passante per P e perpendicolare a r;
b) la retta s passante per P e parallela ad r;
c) se le rette s ed r sono complanari o sghembe;
d) i piani passanti per P e paralleli ad r;
e) la retta q passante per P, perpendicolare ed incidente ad r;
f) il sottospazio vettoriale di dimensione 1 parallelo ad r.

IV) Sia A l'operatore di R^3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinare

a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) equazioni cartesiane degli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

Alcune risposte

I) a) $T = \begin{pmatrix} 2,3,4 \\ 0,1,2 \\ 2,1,0 \\ 1,1,1 \end{pmatrix}$.

b) $KerT = \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$, dim=1, una base è $\{{}^t(1,-2,1)\}$.

c) Dim(ImT)=2, una base è formata, per es., da due colonne di T l.i. , poniamo la 1ª e la 3ª ; eq. parametriche: $\{x_1=2a+4b,\ x_2=2b,\ x_3=2a,\ x_4=a+b\}$, eq. cartesiane: $x_1+x_3-4x_4=0,\ x_2+x_3-2x_4=0\}$.

d) Né iniettiva, né suriettiva.

e) T(U)=ImT.

f) W è il sottospazio nullo, dim=0, base vuota.

g) il compl. ortogonale di KerT è x-2y+z=0, dim=2, una base è $\{{}^t(1,0,-1),\ {}^t(2,1,0)\}$.

II) a) Per k= -2 il sist. è incompatibile; per k=4 ha ∞^1 soluz: x = λ, y =1-2λ , z = ½ +7λ:

per k≠ -2 e k≠ 4 il sistema è determinato: $x = \dfrac{1}{k+2},\ y = \dfrac{k+4}{2(k+2)},\ z = \dfrac{2k^2+k+4}{4(k+2)}$.

b) per k=2 x=1/4, y=3/4, z=7/8. (dalla soluzione precedente o direttamente).

IV) a) Autovalori: λ = 1 con m.a. 2; λ =2 e λ = 4 con m.a. 1.

b) Autospazi: $U_1=\{a.{}^t(0,1,0,0)\}$, dim =1 → A non è diagonaizzabile;

$U_2=\{b.{}^t(0,0,1,-1)\}$, dim=1 (ovvio); $U_4=\{{}^t(0,0,1,1)\}$, dim=1.

Complemento: L'autospazio associato a un autovalore λ di A è il Ker dell'endomorfismo di $\boldsymbol{R}^n$ A-λI, ovvero l'insieme soluzione del sistema (nxn) lineare omogeneo $(A-\lambda I)\underline{v} = \underline{0}$. Perciò se si dispone di un software che risolve sistemi lineari si possono trovare autospazi e Ker.