FACOLTA' di INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 17-02-2009 **Compito A**

I) Sia $T: R^3 \to R^4$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + 6x_2 + 5x_3, x_1 + 2x_2, x_1 + 5x_3, 2x_1 + 2x_2 + 5x_3).$$

Determinare:

a) una matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di R^4 e di R^3;
b) equazioni cartesiane di Ker(T), una base e la dimensione di Ker(T);
c) equazioni parametriche di Im(T), una base e la dimensione di Im(T);
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'immagine, attraverso T, del sottospazio $U: x_1 + 3x_3 = 0$;
f) equazioni cartesiane del sottospazio W= Ker(T) $\cap U$, una base e la dimensione di W;
g) equazioni cartesiane del complemento ortogonale di Ker(T), una base e la dimensione.

II) a) Si discuta il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} k^2x + 2z = 1 \\ 8x - 2y - z = -k \\ 2kx + 2y + 3z = -1 \end{cases}$$

b) Si risolva il sistema per k=2.

III) In R^3 sono dati il punto P(0, 2, 1), la retta $r \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z + 4 = 0 \end{cases}$

Determinare:

a) il piano π passante per P e perpendicolare a r;
b) la retta s passante per P e parallela ad r;
c) se le rette s ed r sono complanari o sghembe;
d) i piani passanti per P e paralleli ad r;
e) la retta q passante per P, perpendicolare ed incidente ad r;
f) il sottospazio vettoriale di dimensione 1 parallelo ad r.

IV) Sia A l'operatore di R^3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinare

a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) equazioni cartesiane degli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

Soluzione:

I) a) T = $\begin{pmatrix} 4,6,5 \\ 1,2,0 \\ 1,0,5 \\ 2,2,5 \end{pmatrix}$

b) → $\begin{pmatrix} 1,2,0 \\ 1,0,5 \\ 2,2,5 \\ 4,6,5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1,2,0 \\ 0,-2,5 \\ 0,-2,5 \\ 0,-2,5 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango(T) = Dim(\operatorname{Im} T) = 2 \Rightarrow Dim(KerT) = 3-2 = 1.$

KerT = $\begin{cases} x+2y=0 \\ -2y+5z=0 \end{cases}$ (eq. cartesiane), da cui seguono le eq. parametriche $\begin{cases} x = 10\lambda \\ y = -5\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$.

c) Per ImT si può scegliere come base due colonne (libere) di T, per esempio la 2ª e la 3ª divise magari rispettivamente per 2 e per 5. $Base(\operatorname{Im} T) = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Le equazioni parametriche sono ovvie: $x_1=3a+b$, $x_2=a$, $x_3=b$, $x_4=a+b$. Eliminando i parametri, si ottengono le equazioni cartesiane: $x_1=3x_2+x_3$, $x_4=x_2+x_3$.

d) T non è iniettiva perché KerT$\neq\{\underline{0}\}$ è non è suriettiva perché ImT (dim 2) è strettamente inclusa nel codominio $\boldsymbol{R}^4$ di T. Si noti che un'applicazione lineare di $\boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^4$ non può mai essere suriettiva, perché…

e) U ha dim. 2, una sua base è $\{u_1 = {}^t(0,1,0),\ u_2 = {}^t(3,0,-1)\}$. T(U) è generata da $T(u_1) = {}^t(6,2,0,2)$ e $T(u_2) = {}^t(7,3,-2,1)$ che, essendo lin. indipendenti, sono una base di T(U) che pertanto ha dim. 2, come ImT, ed essendo inclusa in ImT, coincide con ImT.

f) KerT ha dim=1, U ha dim=2 e siccome il vettore di base di KerT non appartiene ad U, l'intersezione è il sottospazio nullo (la cui base è **vuota**).

g) il complemento ortogonale di KerT (dim=1) ha dim=3-1=2 (geometricamente è un piano per l'origone) e la sua equazione cartesiana è 10x-5y-2z = 0, una sua base è

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$.

II a)

$$\begin{pmatrix} k^2,0,2 \\ 8,-2,-1 \\ 2k,2,3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1,2,-8 \\ 3,2,2k \\ 2,0,k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1,2,-8 \\ 0,-4,24+2k \\ 0,-4,16+k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ -1-3k \\ 2+k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1,2,-8 \\ 0,-4,24+2k \\ 0,0,k^2-2k-8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ -1-3k \\ 2+k \end{pmatrix}.$$

$k^2-2k-8 = 0$ per k=4 o per k=-2.

1° caso: k=4. La 3ª riga fornisce 0 = 6, e quindi il sistema è incompatibile.

Notare che ciò è coerente col teorema di Rouché – Capelli: Rg(A) =2 diverso da Rg(A^c)=3, ma ciò non mi serve per studiare il sistema.

2° caso: k = -2. In tal caso la 3ª riga fornisce 0 = 0 e il sistema è indeterminato (∞^1 soluzioni). Posto x = λ, (è la 3ª incognita!), segue -4y +20λ= 6-1 → y = 5λ-5/4, z = -2-2y-8x = -2λ+1/2.

3° caso k $\neq$4 e k $\neq$ -2: in tal caso il sistema è determinato:
x = 1/(k-4), -4y +(24+2k)/(k-4) = -1-3k e con qualche calcolo y = (3k^2-9k+20)/(4k-16),
z = k-2y+8x = … = (-k^2+k-4)(2k-8). In definitiva:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{k-4} \\ y = \dfrac{3k - 9k + 20}{4(k-4)} \\ z = \dfrac{-k^2 + k - 4}{2(k-4)} \end{cases}$$

b) Per k = 2 si ha: x = -1/2, y = -7/4, z = 3/2, come si ricava dalla formula generale precedente o direttamente.

III) a) Siccome il vettore direttore di r è ^{t}(2,1,1), l'equazione di π è 2x+(y-2)+(z-1) = 0 ovvero 2x+y+z-3 = 0.

b) Equazioni parametriche di s: x = 2λ, y = 2+λ, z = 1+λ; cartesiane: x = 2z-2, y = z+1.

c) Le rette r ed s, essendo parallele, saranno complanari.

COMPLEMENTO. Volendo il loro piano, si imponga al generico piano del fascio di asse r il passaggio per un punto di s, per esempio P. Si trova 5x+2y-12z+8 = 0.

d) i piani passanti per P e paralleli ad r sono quelli del fascio di asse s.
a(x-2z+2)+b(y-z-1) = 0. Un secondo modo è di scegliere nella stella di piani di centro P quelli paralleli ad r (o ad s).

e) Si consideri il vettore PR essendo R il generico punto di r: R(2λ, λ-4, λ) e si imponga che PR sia ortogonale ad r . (2λ, λ-6, λ-1).^{t}(2,1,1) = 0 → 6λ-7 = 0, λ = 7/6.
Perciò PR = ^{t}(14/6, -29/6, 1/6) e la richiesta retta q è x = 14t, y=2-29t, z=1+t).

COMPLEMENTO. Si noti che la distanza di P da r è la norma di PR:

$$\|PR\| = \frac{\sqrt{14^2 + 29^2 + 1^2}}{6} \frac{\sqrt{196 + 841 + 1}}{6} = \frac{\sqrt{1038}}{6} = \sqrt{\frac{173}{6}}\,.$$

f) il sottospazio di dimensione 1 parallelo ad r è il sottospazio direttore di r ovvero la retta per l'origine parallela ad r (basta cancellare i termini noti): x-2z = 0, y-z = 0.

IV) a) $\begin{pmatrix} 3-\lambda,0,0,0 \\ 0,2-\lambda,1,1 \\ -1,0,4-\lambda,1 \\ 0,0,0,3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (3-\lambda)\begin{pmatrix} 2-\lambda,1,1 \\ 0,4-\lambda,1 \\ 0,0,3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (3-\lambda)^2(2-\lambda)(4-\lambda) = 0.$

Autovalori: 2 e 4 di m.a.=1 e 3 di m.a. =2.

b) Autospazi.

U$_3$: $\begin{pmatrix} 0,0,0,0 \\ 0,-1,1,1 \\ -1,0,1,1 \\ 0,0,0,0 \end{pmatrix}\vec{v} = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$. U$_3$ ha dimensione 2 e una sua base è $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Dim(U$_3$)=2 basta per concludere che A è diagonalizzabile, perché…

U_2: $\begin{pmatrix} 1,0,0,0 \\ 0,0,1,1 \\ -1,0,2,1 \\ 0,0,0,1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \to \begin{pmatrix} 1,0,0,0 \\ 0,0,1,1 \\ 0,0,2,1 \\ 0,0,0,1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1,0,0,0 \\ 0,0,1,1 \\ 0,0,0,-1 \\ 0,0,0,1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 = \lambda \end{cases}$. Dim($U_2$)=1 (era ovvio)

e una base di U_2 è ${}^t(0,1,0,0)$.

U_4: $\begin{pmatrix} -1,0,0,0 \\ 0,-2,1,1 \\ -1,0,0,1 \\ 0,0,0,-1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_2 = 0 \end{cases} \to U_2 = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Dim($U_4$)=1.

c) Una (perché **una** e non **la**?) matrice diagonale simile ad A è D = $\begin{pmatrix} 2,0,0,0 \\ 0,3,0,0 \\ 0,0,3,0 \\ 0,0,0,4 \end{pmatrix}$ e una (perché **una** e non **la**?) matrice diagonalizzante relativa a D è $P = \begin{pmatrix} 0,0,1,0 \\ 1,0,1,1 \\ 0,1,1,2 \\ 0,-1,0,0 \end{pmatrix}$.

Complemento. Gli autovettoridi di U_3 non sono ortogonali, però si può ottenere (ed in infiniti modi) una base ortogonale di autovettori per U_3 . Basta prendere come base di auto vettori $\underline{v}_1$= $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2$ combinazione lineare di $\underline{v}_1$ e di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in modo che $\underline{v}_1 . \underline{v}_2$=0: $\underline{v}_2$=$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

I vettori $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ e i vettori di base degli auto spazi monodimensionali U_2 e U_4 costituiscono una base di auto vettori di $\boldsymbol{R}^4$, però non è possibile ottenere una base ortogonale di autovettori di A per $\boldsymbol{R}^4$, perché gli autospazi dovrebbero essere ortogonali a due a due e ciò, nel nostro caso, non accade.