FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 08-09-2008 **Compito A**
(Bianco e Celeste)

I) Sia T: $R^4 \rightarrow R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + 3x_2 - 2x_4,\ x_1 - 2x_2 + 2x_3,\ 5x_2 - 2x_3 - 2x_4)$$

Determinare:
a) la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche;
b) equazioni cartesiane, una base e la dimensione di kerT;
c) equazioni parametriche, una base e la dimensione di ImT;
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) la controimmagine di $\underline{v}$ (2, 0, 3) tramite T;
f) equazioni del complemento ortogonale di ImT;
g) l'equazione cartesiana, una base e la dimensione del sottospazio $U \cap$ ImT, ove U è rappresentato da $x-2y=0$.

II) a) Si discuta e si risolva il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k

$$\begin{cases} x - 2y + kz = k - 2 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ kx - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

b) Si risolva il precedente sistema per $k = 3$.

III) In R^3 sono dati il punto P(2,1,0) e la retta r : $x + 2y - 4z = x + z = 0$.

Determinare:
a) la retta s passante per P e parallela ad r;
b) il piano π per P e perpendicolare ad r ;
c) il punto $T = r \cap \pi$;
d) I piani passanti per P paralleli ad r;
e) la distanza di P da r;
f) se le rette r ed s sono complanari o sghembe .

IV) Sia A l'operatore di R^4 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare:
a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) gli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

I)

a) $T = \begin{matrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & -2 \end{matrix} \rightarrow Rg(T)=2$

b) KerT : Dim=4-2=2, eq. cartes. $x_1+3x_2-2x_4=0$, $-5x_2+2x_3+2x_4=0$.

Eq. parametriche: $x_2=2a$, $x_4=b$, $x_1=-6a+2b$, $x_3=5a-b$ e una base è $\{{}^t(-6,2,5,0), {}^t(2,0,-1,1)\}$.

c) Dim(ImT)=Rg(T)=2, una base è {1/2(3ª colonna), -1/2(4ª colonna)},
Eq. parametriche: x=b, y=a, z=-a+b → Eq. cartesiana: x-y-z=0.

d) T non è iniettiva (KerT≠0) e non è suriettiva (ImT≠$\boldsymbol{R}^3$ codominio di T).

e) Siccome $\underline{v} = {}^t(2,0,3)$ non sta in ImT (Vedi eq. cart.), $T^{-1}(\underline{v}) = \emptyset$ (è vuota).

f) Il complemento ortogonale di ImT è $\{\alpha.{}^t(1,-1,-1)\}$. (Vedi eq. cartes. di ImT).

g) $U \cap ImT = \{x-2y=0, x-y-z=0\} = \{x=2y, z=y\} = \{\alpha.{}^t(2,1,1)\}$.

II)

a) $\begin{matrix} 1 & -2 & k & | & k-2 \\ 2 & -3 & 1 & | & -4 \\ k & -2 & -2 & | & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & -2 & k & | & k-2 \\ 0 & 1 & (1-2k) & | & -2k \\ 0 & (2k-2) & (-2-k^2) & | & (2k-k^2) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 & -2 & k & | & k-2 \\ 0 & 1 & (1-2k) & | & -2k \\ 0 & 0 & 3k(k-2) & | & k(3k-2). \end{matrix}$

1° k=2; la 3ª riga → 0=8 → Sistema incompatibile.

2° k=0; la 3ª eiga → 0=0 → Sistema indeterminato con ∞^1 soluzioni:
z=λ, y= -λ, x=-2-2λe ordinando: x=-2(1+λ), y=-λ, z=λ.

3° k ≠2 e k ≠0: Sistema determinato. Calcolando a ritroso e ordinando:

$$\begin{cases} x = \dfrac{16}{3(k-2)} \\ y = \dfrac{5k+2}{3(k-2)} \\ z = \dfrac{3k-2}{3(k-2)} \end{cases}$$

b) Per k=3, sia dalla soluzione generale di cui sopra, sia direttamente, si ottiene:
x=16/3, y=17/3, z=7/3.

III) P(2,1,0); r: x=λ, y=-(5/2)λ, z=- λ, ovvero: x=2α, y=-5α, z=-2α.

a) s: x=2+2a, y=1-5a, z=-2°.

b) π: 2x-5y-2z+1=0.

c) T : 4a-5(-5a)+4a+1=0 → a=-1/33 e T(-2/33, 5/33, 2/33).

d) Le rette richieste formano un fascio di asse s. Eq. cartesiane di s: x+z-2= 2y-5z-2 =0,
perciò il fascio di piani F(s) è α(x+z-2)+β(2y-5z-2)=0. [1
]

Variante. Si parte dalla stella di piani di centro P : a(x-2)+b(y-1)+cz=0 e si impone che il vettore direttore di s $={}^t(2, -5, -2)$ appartenga alla giacitura del piano generico della stella:
2a-5b-3c=0, da cui c=a-5b/2 e quindi F(s) è ax+by+(a-5b/2)z-2a-b=0. [2]
Si noti che [2] coincide con [1] ponendo a= α e b=2β.

e) R(2a, -5a, -2a) punto generico di r. Vettore $\underline{PR} = {}^t(2a-2, -5a-1, -2a)$. Impongo che $\underline{PR}$ sia ortogonale ad r: 2(2a-2)-5(-5a-1)-2(-2a)=0 → a=-1/33 e $\underline{PR} = {}^t(-68/33, -28/33, 2/33)$.

Perciò $d(P,r) = \|\underline{PR}\| = \dfrac{\sqrt{68^2+28^2+2^2}}{33} = \dfrac{\sqrt{5412}}{33} = \sqrt{\dfrac{5412}{33^2}} = \sqrt{\dfrac{164}{33}}$.

f) Le rette r ed s, sono complanari perché parallele. Verificare che stanno nel piano x-2y+6z=0.

IV)

a) $\begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (5-\lambda) & 1 & 1 \\ 4 & 3 & (3-\lambda) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (2-\lambda)\,(2-\lambda)\begin{vmatrix} (5-\lambda) & 1 \\ 3 & (3-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (2-\lambda)^2(\lambda^2-8\lambda+12) = 0 \rightarrow$

$(2-\lambda)^2(\lambda-2)(\lambda-6) = 0$ e dunque $\lambda=2$ con m.a.=3 e $\lambda=6$ con m.a.=2.

b) autospazi.

$U_{(\lambda=2)}$: $\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$ (3ª riga – 2ª) $\rightarrow$ $\begin{matrix} x_4 = -3x_2 - x_3 \\ x_1 = 0 \end{matrix}$ $\rightarrow \dim(U_{(\lambda=2)}) = 2$;

una base è $\{{}^t(0,1,0,-3), {}^t(0,0,1,-1)\}$.

$U_{(\lambda=6)}$: $\begin{matrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{matrix} \rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, perciò la 2ª e la 3ª danno entrambe $x_3 = x_2$.

Si conclude che $\dim(U_{(\lambda=6)}) = 1$, come era ovvio, e una base è $\{{}^t(0,1,1,0)\}$.

c) A non è diagonalizzabile, perché la m.g. dell'autovalore 2, uguale a $\dim(U_{(\lambda=2)}) = 2 <$ m.a.=3.