FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 27- 06-2008 Compito B

I)Sia T: $R^4 \rightarrow R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + x_2 + 4x_4 ,\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2\,x_4 ,\ -x_2 - x_3 + 2x_4)$$

Determinare:
a) la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche;
b) equazioni cartesiane, una base e la dimensione di kerT;
c) equazioni parametriche, una base e la dimensione di ImT;
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'immagine del sottospazio U di equazione $x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$ tramite T;
f) equazioni del complemento ortogonale di ImT;
g) l'equazione cartesiana, una base e la dimensione del sottospazio $U \cap \mathrm{KerT}$.

II) a) Si discuta e si risolva il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ -3x + y + kz = -3 \\ 3x + ky + z = 3 \end{cases}$$

b) Si risolva il precedente sistema per k = 0.

III) In R^3 sono dati i punti P(-3,0,2) , Q(0,1,1) e il piano π: $2x - y + 4z = 0$.

Determinare:
a) la retta r passante per P e per Q;
b) la retta passante s per P e perpendicolare a π;
c) il punto $T = s \cap \pi$;
d) le rette passanti per P parallele a π;
e) la distanza di P da π;
f) se le rette r ed s sono complanari o sghembe .

IV) Sia A l'operatore di R^4 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare:
a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) gli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

Svolgimento.

I

a) $T = \begin{pmatrix} 1,1,0,4 \\ 1,2,1,2 \\ 0,-1,-1,2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1,1,0,4 \\ 0,1,1,-2 \\ 0,0,0,0 \end{pmatrix}$. Rango(T)=2 → dim(Im T)=2 e dim(Ker T)=4-2=2.

b) KerT: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$. Posto $x_3= \alpha$, $x_4= \beta$, segue $x_2= -\alpha+2\beta$, $x_1= \alpha-6\beta$.

$x_1= \alpha-6\beta$
$x_2= -\alpha+2\beta$
$x_3= \alpha$
$x_4= \beta$ (Equazioni parametriche di Ker T).

Una base di Ker T è $\{{}^t(1,-1,1,0), {}^t(-6,2,0,1)\}$.

c) ImT : (dim=2); una base può essere la prima e la terza colonna della matrice T, perciò le equazioni parametriche sono: $\{x= \alpha, y= \alpha +\beta, z= -\beta\}$. Eq. cartesiana di Im T: x-y-z=0.

d) T non è iniettiva, perché Ker T≠{$\underline{0}$} e non è suriettiva perché Im T $\neq \boldsymbol{R}^3$ (codominio di T).

e) Dim(U)=3; una base di U è $\{u_1= {}^t(0,0,1,0), u_2= {}^t(1,0,0,-1), u_3= {}^t(2,-1,0,0)\}$.
Siccome T(U) deve essere incluso in Im T, dim(T(U))≤ 2 =dim(Im T).
$T(u_1)= {}^t(0,1,-1)$; $T(u_2)= {}^t(-3,-1,-2)$. Siccome questi due vettori risultano lin. indipendenti, è inutile calcolare $T(u_3)$: T(U) ha dim=2 e coincide con Im T.

f) Il compl. ortogonale di ImT ha dim=1 ed ha per base il vettore normale a ImT : ${}^t(1,-1,-1)$, come si evince dall'equazione cartesiana di Im T: x-y-z=0.

g) Per determinare U∩ KerT, si sostituiscano le equazioni parametriche di KerT nell'equazione cartesiana di U: si ottiene $-\alpha -\beta = 0$ e perciò basta porre $\beta= -\alpha$ nelle equazioni parametriche di KerT. Si ottiene U∩ KerT = $\{\alpha.{}^t(7,-3,1,-1)\}$, (dim=1)

II.

a) $\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & k & -3 \\ 3 & k & 1 & 3 \end{array} \to \begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & (k+3) & 0 \\ 0 & (k+9) & -2 & 0 \end{array} \to \begin{array}{rrc|r} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & (k+3) & 0 \\ 0 & 0 & (k^2+12k+11)/8 & 0 \end{array}$.

1° caso: $k^2+12k+11 = 0$ → k = -1 oppure k = -11. La 3ª riga del sistema dà 0=0 e il sistema ha ∞^1 soluzioni. Se k = -1, x= 1-λ, y= λ, z=4λ; se k = -11, x = 1+4λ, y= λ, z = -λ.

2° caso: $k^2+12k+11\neq 0$. Il sistema è determinato e l'unica soluzione è x=1, y=0, z=0.

b) Per k = 0 (come per ogni k ≠ -1 e da -11), la soluzione è x=1, y=0, z=0.

III

a) retta r: x=3λ, y=1+ λ, z=1- λ.

b) retta s: x=-3+2t, y=-t, z=2è4t.

c) Per ricavare T=s∩π, sostituisco le equazioni parametriche di s nell'equazione cartesiana di π. Si ottiene t=-2/21 e T(-67/21, 2/21, 34/21).

d) Primo passo: stella di rette p di centro P: x=-3+lλ, y=mλ, z=2+nλ.
Secondo passo: imporre che il vettore direttore (l,m,n) delle rette p appartenga al sottospazio direttore di π (che è π stesso, visto che passa per O): 2l-m+4n = 0 → m=2l+4m. Perciò il fascio di rette richiesto è (ha equaz. parametriche) x=-3+lλ, y=(2l+4m)λ, z=2+nλ.
Si noti che le rette di tale fascio appartengono al piano per P parallelo a π.

e) $d(P, \pi)= \frac{|-6+8|}{\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$.

f) Le rette r ed s hanno il punto P in comune e perciò, essendo incidenti, sono complanari.
Volendo, si faccia il calcolo bruto uguagliando le coordinate nelle equazioni parametriche di r e di s.

IV

a) $$\begin{vmatrix} (4-\lambda),0,0,0 \\ 1,(5-\lambda),0,-1 \\ 0,0,(3-\lambda),0 \\ 2,2,0,(2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(3-\lambda)\begin{vmatrix} (5-\lambda),-1 \\ 2,(2-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (4-\lambda)(3-\lambda)(\lambda^2-7\lambda+12)=0 \Rightarrow (\lambda-3)^2(\lambda-4)^2=0.$ Perciò gli autovalori sono $\lambda=3$ con m.a.=2 e $\lambda=4$ con m.a.=2.

b) Autospazio U_3 : $\begin{pmatrix} 1,0,0,0 \\ 1,2,0,-1 \\ 0,0,0,0 \\ 2,2,0,-1 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0} \to \begin{pmatrix} 1,0,0,0 \\ 0,2,0,-1 \\ 0,0,0,0 \\ 0,2,0,-1 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$, dim=2; una base è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Autospazio U_4 : $\begin{pmatrix} 0,0,0,0 \\ 1,1,0,-1 \\ 0,0,-1,0 \\ 2,2,0,-2 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$, dim =2; una base è

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

c) Siccome gli autospazi hanno dimensione unguale alle molteplicità algebriche dei relativi autovalori, A è diagonalizzabile e una matrice diagonale simile ad A è $D = \begin{pmatrix} 3,0,0,0 \\ 0,3,0,0 \\ 0,0,4,0 \\ 0,0,0,4 \end{pmatrix}$, la relativa matrice diagonalizzante è $P = \begin{pmatrix} 0,0,1,0 \\ 1,0,0,1 \\ 0,1,0,0 \\ 2,0,1,1 \end{pmatrix}$.

N.B. Esistono altre matrici diagonali simili ad A diverse da D (nel qual caso anche P è diversa)?

Complemento

Nel quesito (e) del **I** esercizio si sostituisca il sottospazio U di $\boldsymbol{R}^4$ con W: $x_1+x_2+4x_4=0$.
Verificare che T(W) è strettamente incluso in ImT: $T(W)=\{\alpha.^t(0,1,-1)\}$.
Lo stesso accade per il sottospazio L: $x_1+2x_2+x_3+2x_4=0$. $T(L)= \{\beta.^t(1,0,1)\}$.
Che hanno di speciale e di comune W ed L per cui le loro immagini non esauriscono ImT?
Calcolare W∩KerT ed L∩KerT.