FACOLTA DI INGEGNERIA
Esame di Algebra Lineare e Geometria.
Prova scritta del 27- 06-2008 Compito A

I)Sia T: $R^4 \rightarrow R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + 2x_2 - x_4,\ x_1 - 3x_2 + 2x_3,\ 5x_2 - 2x_3 - x_4)$$

Determinare:
a) la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche;
b) equazioni cartesiane, una base e la dimensione di kerT;
c) equazioni parametriche, una base e la dimensione di ImT;
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) l'immagine del sottospazio U di equazione $x_1 - 2x_2 - x_4 = 0$ tramite T;
f) equazioni del complemento ortogonale di ImT;
g) l'equazione cartesiana, una base e la dimensione del sottospazio $U \cap \text{KerT}$.

II) a) Si discuta e si risolva il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + ky + z = 2 \\ -2x + y + kz = -2 \end{cases}$$

b) Si risolva il precedente sistema per k = 0.

III) In R^3 sono dati i punti P(2,0,1) , Q(1,1,0) e il piano π: $x + 2y - 4z = 0$.

Determinare:
a) la retta r passante per P e per Q;
b) la retta passante s per P e perpendicolare a π;
c) il punto $T = s \cap \pi$;
d) le rette passanti per P parallele a π;
e) la distanza di P da π;
f) se le rette r ed s sono complanari o sghembe .

IV) Sia A l'operatore di R^4 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare:
a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) gli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l'operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

Soluzioni

I.

b) KerT: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$, dim=2, una base $=\{{}^t(3,1,0,5),\ {}^t(-2,0,1,-2)\}$.

c) ImT: dim=2, una base $=\{{}^t(1,1,0),\ {}^t(-1,0,-1)\}$, eq. cartesiana di ImT: x-y-z=0.

e) Dim(U)=3. Siccome T(U) è inclusa in ImT e dei tre vettori di una base di U le immagini di due di essi sono linearmente indipendenti, segue che T(U)=ImT.

f) Il complemento ortogonale di ImT, di dim=1, ha equaz. parametriche $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$. (Vedi eq. cartesiana di ImT).

g) U∩KerT $=\{\beta\cdot{}^t(-2,0,1,-2)\}$. (dim=1).

II

a) Per k= −1, ∞^1 soluzioni: x=1−λ, y= λ, z=3λ;
per k= −5, ancora ∞^1 soluzioni: x=1+3λ, y= λ, z= −λ.
Per k≠−1 e k≠−5, il sistema è determinato: x=1, y=0, z=0.

b) Per k=0, ovviamente, il sistema è determinato: x=1, y=0, z=0.

III

d) Primo passo: stella di rette p di centro P: x=2+lλ, y=mλ, z=1+nλ;
secondo passo: imporre che le direzioni delle p appartengano al sottospazio direttore di π, che poi è π stesso: l+2m-4n=0, da cui l=4n-2m. Perciò il fascio di rette per P parallele a π è x=2+(4n-2m) λ, y=mλ, z=1+nλ.

f) le rette r ed s sono complanari perché incidenti in P per come sono definite. Verificarlo, facendo pedissequamente sistema tra le loro equazioni.

IV

a) autovalori: λ=3, m.a. =2; λ=4, m.a.=2.

b) Gli autospazi U_3 e U_4 hanno entrambi dim=2, perciò A è diagonalizzabile:

c) $D = \begin{pmatrix} 3,0,0,0 \\ 0,3,0,0 \\ 0,0,4,0 \\ 0,0,0,4 \end{pmatrix}$ e una matrice diagonalizzante è $P = \begin{pmatrix} 1,0,1,0 \\ 1,0,0,-2 \\ 0,1,0,0 \\ -1,0,0,1 \end{pmatrix}$.

Le prime due colonne di P sono una base di U_3, le ultime due di U_4.