**FACOLTA DI INGEGNERIA**
**Esame di Algebra Lineare e Geometria.**
**Prova scritta del 10-01-2008**

**Compito A**

**I)** Sia $T: R^3 \to R^4$ l'applicazione lineare definita da
$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_3, x_2 + 4x_3, 2x_1 + 3x_2 + 8x_3, x_1 + 2x_2 + 6x_3)$.

Determinare:
a) la matrice A associata a T rispetto alle basi canoniche di $R^3$ ed $R^4$;
b) equazioni cartesiane di Ker T, una base e la dimensione;
c) equazioni parametriche di ImT, una base e la dimensione;
d) se T è iniettiva e/o suriettiva;
e) equazioni del complemento ortogonale di ImT, precisando una base e la dimensione;
f) una base e le equazioni di $Im(A^T)$;
g) se $R^3 = KerA \oplus Im(A^T)$.

**II**) Si discuta il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k :

$$\begin{cases} 3x_1 - kx_3 + kx_4 = 1 \\ kx_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 + kx_4 = -1. \end{cases}$$

Si risolva il sistema per k=0.

**III**) In $R^3$ sono dati il punto P(1,0,–1), la retta r: x=1–t, y=2–t, z=3t e il piano π: x+y–3=0.
Determinare:
a) la retta s passante per P e parallela a r;
b) il piano π’ passante per P e perpendicolare a r;
c) i piani passanti per P e paralleli a r;
d) le rette passanti per P e perpendicolari a r;
e) la distanza di P da π;
f) se la retta s (del punto a)) è incidente o parallela o contenuta in π.

**IV**) Sia A l’operatore di $R^3$ rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Determinare
a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;
b) equazioni degli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;
c) una eventuale matrice diagonale D che rappresenti l’operatore A e la matrice diagonalizzante relativa a D.

**I)**

a) $A=\begin{pmatrix}1,0,-2\\0,1,4\\2,3,8\\1,2,6\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1,0,-2\\0,1,4\\0,3,12\\0,2,8\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1,0,-2\\0,1,4\\0,0,0\\0,0,0\end{pmatrix}$; Rang(A)=Dim(ImA)=2→Dim(KerA)=1.

b) KerA: x-2z = y+4z=0 , una Base= $^t(2,-4,1)$.

c) ImA: una base è formata dalle prime due colonne di A:

ImA=$\{^t(x_1,x_2,x_3,x_4)$= a. $^t(1,0,2,1)$+ b. $^t(0,1,3,2)\}$: (Eq. parametriche).

Posto $a=x_1$, $b=x_2$, seguono le eq. cartesiane: $\{2x_1+3x_2-x_3=0,\ x_1+2x_2-x_4=0\}$.

d) La T non è iniettiva (KerA non nullo), né suriettiva (ImA $\neq$ dal codominio $\boldsymbol{R}^4$).

e) Il complemento ortogonale di ImA, $(ImA)^H$, è formato di vettori di $\boldsymbol{R}^4$ ortogonali ai vettori di base di ImA; perciò

$(ImA)^H$ : $\{x_1+2x3+x_4=0,\ x_2+3x_3+2x4=0\}$ e ha dim=2, come ImA (4-2=2).

Verificare che $^t(2,3,-1,0)$, $^t(1,2,0,-1)$ formano una base di $(ImA)^H$ e come tali sono ortogonali alla base di ImA.

f) La matrice trasposta $A^t$ di A applica $\boldsymbol{R}^4 \rightarrow \boldsymbol{R}^3$ e ha lo stesso rango di A. Perciò una base di $Im(A^t)$ è {1,0,-2), (0,1,4)}e l'equaz. cartes è di $Im(A^t)$ è z= -2x+4y.

g) Siccome KerA$\cap$ $Im(A^t)=\{\underline{\mathbf{0}}\}$, la loro somma è diretta e siccome le loro dim sono 1 e 2, tale somma diretta è $\boldsymbol{R}^3$.

**II)** Sistema: discuterlo al variare di k e risolverlo per k=0.

Siccome si tratta di un bel sistema, troverò le soluzioni in generale.

$$\text{Matrice } A\underline{\mathbf{b}} = \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & -k & k & 1\\ k & 2 & 4 & 0 & 2\\ 2 & -2 & -5 & k & -1\end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & (5-k) & 0 & 2\\ 2 & -2 & -5 & k & -1\\ k & 2 & 4 & 0 & 2\end{array} \rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & (5-k) & 0 & 2\\ 0 & -6 & (2k-15) & k & -5\\ 0 & (2-2k) & (4-5k+k^2) & 0 & 2-2k\end{array} \rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & (5-k) & 0 & 2\\ 0 & -6 & (2k-15) & k & -5\\ 0 & 0 & (k-1)(k+3)/3 & k(1-k)/3 & (1-k)/3\end{array}.$$

1° <u>caso</u>: k = 1. Il sistema ha la 3ª riga nulla, perciò ammette $\infty^2$ soluzioni:

posto $x_2$ = a, $x_3$=b, segue $x_4$=-5+6a+13b, $x_1$=2-2a-4b e ordinando:

$x_1$= 2-2a-4b, $x_2$ = a, $x_3$= b, $x_4$= -5+6a+13b.

2° <u>caso</u>: k $\neq$ 1. In tal caso dividendo la 3ª riga per (k-1)/3 si ottiene

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & (5-k) & 0 & 2\\ 0 & -6 & (2k-15) & k & -5\\ 0 & 0 & (k+3) & -k & -1\end{array}$$ . Si hanno $\infty^1$ soluzioni.

<u>Sottocaso</u> k=0; posto $x_4=\lambda$, segue $x_3$= -1/3 (dalla 3ª riga), $-6x_2+5=-5$

→ $x_2$= 5/3, $x_1$= 2-10/3+5/3 → $x_1$= 2-5/3 = 1/3 e ordinando:

$x_1$= 1/3 , $x_2$= 5/3 , $x_3$= -1/3 , $x_4=\lambda$.

<u>Sottocaso</u> k≠0 ( e k≠1). Posto $x_3=\lambda$, segue $x_4=[1+(k+3)\lambda]/k$, $-6x_2=-5-(2k-15)\lambda-[1+(k+3)\lambda]$

→ $x_2=1+(k-4)\lambda/2$, $x_1= 2-2[1+(k-4)\lambda/2]-(5-k)\lambda = -\lambda$ e ordinando:

$x_1=-\lambda$ , $x_2=1+(k-4)\lambda/2$ , $x_3=\lambda$ , $x_4=[1+(k+3)\lambda]/k$.

Per k=0, l'insieme soluzione (già trovato) è $x_1$= 1/3 , $x_2$= 5/3 , $x_3$= -1/3 , $x_4=\lambda$.

Si noti che il caso k=0 non è un caso particolare del caso k $\neq$ 1 , ma un caso singolare; infatti non si ottiene per nessun valore finito o infinito di k .

**III)**

a) Retta s: x=1-t, y=-t, z=-1+3t:

b) Piano $\pi'$: x+y-3z-4=0.

c) Piani per P paralleli ad r.Rette per P perpendicolari ad r.
Primo metodo: 1° stella di piani di centro P: $a(x-1)+by+c(z+1)=0$;
2° piani della stella paralleli ad r: $\underline{\mathbf{r}}_0 = {}^t(1,1,-3)$ appartenga al sottospazio direttore $ax+by+cz=0$ del piano generico della stella: $a+b-3c=0$. Perciò i piani richiesti formano un fascio $(3c-b)x+by+cz+b-2c=0$.
Secondo metodo: I piani richiesti formano fascio di asse la retta s già trovata ; perciò, scritte le equazioni cartesiane di s: $x-y-1=0$, $3y+z+1=0$, ricavo: $\lambda(x-y-1)+\mu(3y+z+1)=0$, ovvero $\lambda x+(3\mu - \lambda)y+ \mu z+\mu-\lambda=0$.

d) Rette per P perpendicolari ad r.
Primo metodo: 1° stella di rette di centro P: $x=1+lt$, $y=mt$, $z=-1+nt$;
2° rette della stella ortogonali ad r e perciò $(l,m,n).\,{}^t(1,1,-3)=0$, da cui $x=1+(3n-m)t$, $y=mt$, $z=-1+nt$. (fascio di rette).
Secondo metodo: le rette richieste sono intersezione del piano $\pi'$ e dei piani del fascio di asse s, perciò il fascio di rette richiesto è $\{x+y-3z-4=0,\ \lambda x+(3\mu - \lambda)y+ \mu z+\mu-\lambda=0\}$.[1].
Facoltativo: Determinare il vettore direttore della retta generica del fascio [1] e verificare che è ortogonale al vettore direttore di r: $\underline{\mathbf{r}}_0 = {}^t(1,1,-3)$.
(Secondo me il primo metodo è più semplice e diretto)

e) $d(P,\pi) = \sqrt{2}$ -

f) Il vettore direttore $\underline{\mathbf{r}}_0 = {}^t(1,1,-3)$ di r non appartiene al sottospazio direttore $x+y=0$ di $\pi$ e dunque r non è parallela a $\pi$ (né giace su $\pi$, altrimenti sarebbe parallela al piano), perciò deve essere incidente. Infatti il punto di incidenza è H(2,1,-4).

.

**IV)** $\mathrm{Det}(A-\lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} (5-\lambda) & 0 & 1 \\ 0 & (3-\lambda) & 0 \\ 2 & 0 & (4-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (3- \lambda)\,.[( 5-\lambda))(4-\lambda)-2] = 0 \rightarrow (\lambda-3)( \lambda^2-9\lambda+18) = 0$$ e dunque

a) Aurovalori: $\lambda=3$, m.a.=2; $\lambda=6$, m.a.=1.
b) Autospazi: $U_3$ $2x+z=0$ (dim=2 $\rightarrow$A è diagonalizzabile), base$\{{}^t(1,0,-2), {}^t(0,1,0)\}$;
$U_6$ $\{y=0, x-z=0\}$, base $\{{}^t(1,0,1)\}$.
c)
$$D = \begin{pmatrix} 6,0,0 \\ 0,3,0 \\ 0,0,3 \end{pmatrix}$$ ; matrice diagonalizzante $$P = \begin{pmatrix} 1,0,1 \\ 0,1,0 \\ 1,0,-2 \end{pmatrix}.$$