FACOLTA DI INGEGNERIA

Esame di Algebra Lineare e Geometria.

Prova scritta del 11 /12/2008 traccia B

I) Sia T: R^3 ----> R^4 l'applicazione lineare definita da

$T(x_1,x_2,x_3) = (x_1–x_3,\ 3x_1+x_2 – x_3,\ 4x_1+ x_2– 2x_3,\ – x_1+ x_3)$

Determinare: a) una matrice associata a T rispetto alle basi canoniche di R^3e di R^4;

b) equazioni cartesiane di KerT ,una base e la dimensione di KerT;

c) equazioni parametriche di ImT , una base e la dimensione di ImT;

d) se T è iniettiva e/o suriettiva;

e) il complemento ortogonale di KerT ;

f) l'immagine del sottospazio vettoriale U: $x_1+ 2x_2 – x_3=0$ tramite T.

II)

a) Si discuta e si risolva il seguente sistema parametrico al variare del parametro reale k

$$\begin{cases} kx - z = 0 \\ x + (k-1)y - z = 0 \\ x + ky + 2z = 1 \end{cases}$$

b) Si risolva il sistema per k=2.

III) In R3, sono dati il punto P(2,0,1) e il piano π : x + y – 2z – 1 = 0.

Determinare: a) la retta r passante per P e perpendicolare a π ;

b) il piano π' passante per P e parallelo a π;

c) la distanza tra P e π ;

d) le rette passanti per P e parallele a π;

e) il piano per P parallelo ai vettori u(1,3,0) e v(1,-1,2);

f) il sottospazio vettoriale di R3 di dimensione 2 parallelo a π.

IV) Sia A l'operatore di R3 rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Determinare: a) gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche;

b) gli autospazi di A, specificando basi e dimensioni;

c) una eventuale forma diagonale D che rappresenti l'operatore A e la sua eventuale matrice diagonalizzante.

Soluzione

I)

a) $$T = \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1. \end{matrix}$$ (Matrice associata)

b)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$ → Rango(T) =2 → dim(KerT)= 3-2=1; kerT= $\{x_1–x_3 =0,\ x_2+2x_3=0\}$,

e quindi una base di KerT è $\{{}^t(1, -2, 1)\}$.

c) ImT: dim=Rango(T)=2; una base è costituita da due colonne di T lin. indipendenti, per es. la 1^a e la 2^a. Perciò ImT=$\{\alpha.{}^t(1,3,4,-1)+\beta(0,1,1,0)\}$.
Equaz. parametriche di ImT: $x_1=\alpha$; $x_2=\beta$; $x_3=4\alpha+\beta$; $x_4=-\alpha$.
Equaz. cartesiane di ImT: $\{x_1+x_4=0,\ x_1+x_2-x_3=0\}$.

d) T non è iniettiva, perché KerT$\neq\{\underline{0}\}$ e non è suriettiva, perché ImT$\neq R^4$ (codominio di T).
Che T: R^3 ----> R^4 non fosse suriettiva era ovvio indipendentementa dalla particolare T. Perché?

e) Il complemento ortogonale di KerT è il sottospazio di tutti i vettori (x_1,x_2,x_3) di R^3 ortogonali a KerT: $\{(x_1,x_2,x_3).{}^t(1,-2,1)=0\}$, ovvero $x_1-2x_2+x_3=0$.

f) Una base di U è $\{\underline{u}_1={}^t(1,0,1),\ \underline{u}_2={}^t(0,1,2)\}$, perciò U=$\{\alpha.\underline{u}_1+\beta.\underline{u}_2\}$ e di conseguenza T(U)=$\{\alpha T(\underline{u}_1)+\beta T(\underline{u}_2)$. Risulta $T(\underline{u}_1)={}^t(0,2,2,0)$ e $T(\underline{u}_2)={}^t(-2,-1,-3,2)$. Siccome T/U) è un sottospazio di ImT e siccome $T(\underline{u}_1)$ e $T(\underline{u}_2)$ sono linearmente indipendenti, T(U) ha dimensione 2 come ImT, perciò T(U)=ImT.

II) a) Matrice del sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 0 & -1 & 0 \\ 1 & (k-1) & -1 & 0 \\ 1 & k & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & (k-1) & -1 & 0 \\ k & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -k^2 & (-1-2k) & -k \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & (3k^2-2k-1) & k^2-k. \end{array}\right)$$

Il coeff. $3k^2-2k-1$ si annulla per $k=-1/3$ o per $k=1$.
Se $k=-1/3$, la 3^a riga fornisce $0 = 1/9+1/3 \rightarrow$ sistema incompatibile;
se $k=1$, la 3^a riga fornisce $0 = 0$, il rango del sistema è 2 e il sistema ha $\infty^{3-2}=\infty^1$ soluzioni:
posto $z=\lambda$, segue $y = 1-3\lambda$, $x = 1-2\lambda-(1-3\lambda) = \lambda$; ordinando:

$$\mathbf{x = \lambda,\ y = 1-3\lambda,\ z = \lambda.}$$

Se $k\neq-1/3$ e $k\neq 1$, il sistema è determinato: $z = (k^2-k)/(3k^2-2k-1)= k/(3k+1)$,
$y= 1-3k/(3k+1) = 1/(3k+1)$, $x= 1-2k/(3k+1) - k/(3k+1) = 1/(3k+1)$; ordinando:

$$\mathbf{x = 1/(3k+1)\ ,\ y = 1/(3k+1),\ \ z = k/(3k+1).}$$

b) Per k=2 il sistema è determinato e $\mathbf{x = 1/7,\ y = 1/7,\ z = 2/7,}$
come si ricava dalla soluzione generale precedente e come si verifica direttamente.

III)

a) La retta r per P perpendicolare a π è $x = 2+t$, $y = t$, $z = 1-2t$;
vettore direttore $\underline{\mathbf{r}} = {}^t(1,1,-2)$.

b) Il piano π' per P parallelo a π è : $(x-2)+y-2(z-1) = 0 \rightarrow x+y-2z = 0$.

c) $d(P, \pi) = |2+0-2-1|/\sqrt{6} = \sqrt{6}/6$.

d) Le rette per P parallele a π formano un fascio di centro P e giacenti nel piano π'.
I° metodo: nella stella di rette di centro P $x=2+lt$, $y=mt$, $z=1+nt$, imporre che il vettore direttore ${}^t(l,m,n)$ appartenga al sottospazio direttore di π $x+y-2z=0$ da cui $l=2n-m$;
fascio di rette richiesto: $x=2+(2n-m)t$, $y= mt$, $z= 1+nt$. [1]
II° metodo: intersecare il fascio di piani di asse r col piano π'.
r :$\{x-y-2=0,\ 2y+z-1=0\}$; fascio di piani $a(x-y-2)+b(2y+z-1)=0$;
fascio di rette richiesto: $\{a(x-y-2)+b(2y+z-1)=0,\ x+y-2z=0\}$. [2]
Verificare che i fasci [1] e [2] coincidono.

IV) Autovalori:

$$\text{Det}(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} (3-\lambda) & 1 & 1 \\ 2 & (4-\lambda) & 2 \\ 0 & 0 & (2-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = 0 \rightarrow$$

a) $\lambda = 2$, $\lambda = 2$, $\lambda = 5$. Dunque, $\lambda = 2$, m.a. 2, $\lambda = 5$, m.a. 1.

b) Autospazi.

$$U_2: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow U_2: x+y+z = 0 \ (\dim = 2), \text{ una base è}$$

$\{{}^t(1,-1,0), {}^t(1,0,-1)\}$.

$$U_5: \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow U_5: z=0,\ y=2x \ (\dim = 1), \text{ una base è } \{{}^t(1,2,0)\}.$$

c) Siccome le molteplicità geometriche degli autovalori (dim. dei rispettivi autospazi) sono uguali alle molteplicità algebriche, A è diagonalizzabile. Una matrice diagonale simile ad A è $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ e una matrice diagonalizzante è $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nota1. Ricordo che $D = P^{-1}.A.P \Leftrightarrow AP = PD$.

Nota2. Per una data D, P potrebbe essere diversa da quella indicata?

Complememto. Se assumo come matrice diagonale

$D' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, quale sarà una matrice diagonalizzante?